Correspondance d'Eugène Catalan. Volume VIII : lettres non datées

No 8.

Lettres non datées

Monsieur,

J'ai deux formules générales de transformation, lesquelles appliquées à la série

$$S = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots \pm \frac{1}{(2n-1)^2} \mp \cdots$$

donnent respectivement, sauf erreur de calcul :

$$S = \frac{5}{6} + 4\left[\frac{1}{1.3^2.5} - \frac{1}{3.5^2.7} + \cdots \pm \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)} \mp \cdots\right]$$

$$S = \frac{49}{54} + 8\left[\frac{2}{3^3.5^3} - \frac{3}{5^3.7^3} + \cdots \pm \frac{n+1}{(2n+1)^3(2n+3)^3} \mp \cdots\right]$$

ces deux transformées constituent un premier degré de convergence : mes formules comportent d'autres transformées d'un degré de convergence plus élevé, mais qui seraient trop compliquées pour être employées avec avantage.

Je vous adresse ceci, en attendant que j'aie le temps de préparer une feuille de calculs que je vous enverrai sous huit ou dix jours.

Je pense que mes mêmes formules générales me permettront sans trop de prolixité dans les calculs, d'évaluer la limite de votre série avec une dizaine de décimales environ. est ce là ce que vous appelez une grande approximation ?

Jusqu'à vérification, ne prenez ces premiers résultats que sous toute réserve.

Leclert

Monsieur E. Cotelon
ancien élève
de l'école polytechnique

de Pelat [illegible]
rue de Rivoli, 15

Paris.

Monsieur,

Je vous adresse la partie la plus longue de mon travail, celle qui concerne les séries à termes positifs.

A raison de l'excessive longueur de cette note, je crois devoir vous présenter séparément, en résumé, seulement ce qui peut être nouveau et inédit dans mes résultats.

J'ai abandonné la forme $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots$, pour prendre la forme plus naturelle et plus généralement adoptée :

$$(1) \qquad S = u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+u_{n+1}+\dots$$

mon analyse en devient d'ailleurs plus simple et plus facile.

J'ai eu pour but de rendre complète et suffisante, la méthode connue (mais jusqu'à présent incomplète et insuffisante) qui repose sur la considération du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Lorsque les termes de la série (1) sont supposés indéfiniment décroissants vers zéro, il ne se présente que deux cas bien distincts, savoir :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{et} \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Le premier cas est résolu, car on sait que, si on a $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la série (1)

est convergente.

Donc superflu de

Voici la solut

pour le second cas

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$

solution que je

démontrée dans

Soit la fonctio

(2) $\varphi(n) = (1+$

De l'hypothèse

conclut évidem

par suite,

$\lim . \varphi$

Ceci posé, il se p

ou bien la fonctio

ou bien elle est

pour les très gr

ces deux cas se d

clairement, en

$\lim . \varphi(n) = +$

$\lim . \varphi(n) = +$

Le 1er cas se tro

théorème suiv

« Lorsque l'o

« $\lim . \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ o

« la série (1) o

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

à la rigueur, il est
s'en occuper.
ion que je propose
,
$=1$;
rois avoir suffisamment
me longue note.
on auxiliaire
$\frac{u_{n+1}}{u_n})(1+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}})$.
$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, on
ment $\lim \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}=1$; et
$(n)=h$.
résente deux cas:
n $\varphi(n)$ est décroissante;
croissante (au moins
ndes valeurs de n).
fférencient très
écrivant:
(minimum) ... [1er cas],
(maximum) ... [2e cas].
ve résolu par le
nt:
n a tout à la fois:
$\lim \varphi(n)=h$ (minimum),
st toujours convergente."

Pour résoudre le 2e cas, il me faut un troisième élément: c'est la série auxiliaire convergente,

$$(3)\quad f=\frac{u_2}{u_1+u_2}+\frac{u_1u_3}{(u_1+u_2)(u_1+u_2+u_3)}+\frac{u_1u_4}{(u_1+u_2+u_3)(u_1+\dots+u_4)}+\dots\dots+\frac{u_1u_{n+1}}{(u_1+\dots+u_n)(u_1+\dots+u_n+u_{n+1})}+\dots\dots\dots,$$

dont la loi est bien évidente.

Je démontre dans ma note que la série (3) est toujours convergente, et que sa valeur exacte ou somme est tout au plus égale à 1: c'est à dire que l'on ne peut avoir que $f<1$ ou $f=1$, et jamais $f>1$.

Ensuite j'établis ce nouveau théorème:

" Lorsque l'on a tout à la fois:
" $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ et $\lim \varphi(n)=h$ (maximum),
" la série (1) sera convergente si
" on a " $f<1$;
" et elle sera divergente si on a "
" $f=1$."

(Nota). - Il est peut être difficile (pratiquement), si ce n'est dans quelques cas particuliers, de déterminer bien rigoureusement si l'on doit avoir $f<1$ ou $f=1$.

Voici, pour cette détermination, un procédé que je ne puis qu'indiquer, parce qu'il repose sur une théorie que je ne

possède pas dans le ce
de mes faibles conno

Je ne puis douter q
méthode ou formule
connais pas) pour dé
la précision désiré
-eure de l'erreur com

prend un certain n
dans toute série co
positifs.

Alors je procèder
Soit f_{n+1} la somm
termes de la série
supérieure (très ro
nécessaire)*, de t

(4) $f_{n+1} < f < f_{n+}$

Il est bien évid
$f_{n+1}+\varepsilon \leqq 1$, on aura
on trouve $f_{n+1}+\varepsilon >$
qui me conduit à
« La série (1) se
« divergente, s
ie $f_{n+1}+\varepsilon \leqq 1$ ou f_{n}

* De l'erreur commise

A bientôt, pour en finir, l
-tivement positifs et ne
et la démonstration se

Neufchâtel, 21 juillet 19

adre trop restreint
issances.
u'il existe une
générale (que je ne
éterminer, avec toute
able, une limite supéri-
mise, quand on
nombre de termes
nvergente a termes

ais ainsi qu'il suit :
ne des n premiers
(3); et ε, une limite
pprochée, s'il est
telle sorte qu'on ait
$+\varepsilon$.

dent que, si on trouve
$f < 1$; et que, si
> 1, on aura $f = 1$: ce
ce dernier théorème :
ra convergente ou
ivant qu'on aura »
$+\varepsilon > 1$. »

es séries à termes alterna-
gatifs, dont l'exposition
eront très courtes.

859. Leclerc

M. Catalan est il bien sûr de n'avoir pas fait d'erreur de calcul dans l'application de mes formules pour déterminer la constante

$$G = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \ ?$$

Quant à moi, en appliquant ma formule (3) je trouve :

$$G = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = \sum_1^{10} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} + \sum_1^{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^i \Delta^{i-1} \frac{-1}{(2.11-1)^2}$$

$$- \frac{1}{2^{12}} \sum_{11}^{\infty} \Delta^{12} \frac{-1}{(2n-1)^2} .$$

$-\frac{1}{2^{12}} \sum_{11}^{\infty} \Delta^{12} \frac{-1}{(2n-1)^2}$ comprise entre 0 et $= \frac{1}{2^{12}} \Delta^{12} \frac{-1}{21^2} =$ 0.00000 00000 051

D'où G comprise entre 0.915 965 593 392 95
et 0.915 965 593 398 09

$G = 0.915\,965\,593\,39$, au lieu
de $G = 0.915\,965\,594\,177$, trouvé par M. Catalan.
nos résultats diffèrent de 4 unités du 10e ordre décimal

Je ne sais si je suis d'accord avec mes premiers calculs communiqués à M. Catalan, calculs dont je n'ai pas conservé de minute.

Neufchâtel, 6 octobre 1864

Lebert.

Monsieur,

Je vous demande bien pardon, si je viens encore à la charge sur ma formule :

(C) $S - (S_{n-1} + \varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots + \varphi_{n+p-1}) < \varphi_{n+p}$.

Ce n'est plus que pour plaider les circonstances atténuantes en sa faveur, en signalant, s'il est possible, un caractère distinctif à l'aide duquel on discernerait les cas douteux des cas où elle serait d'une exactitude assurée.

J'ai me tombe sous la main un opuscule, (théorie élémentaire des séries par Berger), où je trouve, page 32, énoncé et démontré le théorème suivant :

« Lorsqu'une série dont les termes « ont des signes quelconques est convergente « et qu'elle reste convergente quand on « prend tous les termes positivement, « elle le sera encore quand on disposera « les termes avec leurs signes dans un « ordre quelconque, et aura la même somme. »

Comme corollaire de
conclus : « que la form
« toutes les fois que la
« $\varphi_n + \varphi_{n+1} + \cdots\cdots$ ser
« que cette même for
« qu'une exactitude
« la série $\varphi_n + \cdots$ sera

Si cette conséquence
restera, ce me semb
assez vaste marge
de ma formule.

Ainsi :

1°. Dans l'hypothèse
proposée satisfait à

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

on a $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{1-}{1-}$

et par suite aussi lim

Donc, dans cette hypot
est exacte et pourra ê
toute sécurité.

2°. Dans l'hypothe
se présentera un très gra
dans lequel la série a

ce théorème, je
mule (C) sera exacte.
série auxiliaire
a convergente, et
mule (C) n'aura
douteuse quand
divergente. »
est vrai, il
le, encore une
pour l'emploi

où la série
la condition

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$
$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} < 1.$$

thèse, la formule (C)
tre appliquée en

ère $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, il
nd nombre de cas,
uxiliaire sera

encore convergente,

Soit, pour exemple, la série

$$S = S_{n-1} + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \cdots\cdots$$

on a : $\varphi_n = \dfrac{(n+1)^m}{n^m\left[(n+1)^m - n^m\right]} = \dfrac{(n+1)^m}{m\,n^{2m-1} + \cdots\cdots}$

et est facile de reconnaître que la série auxiliaire $\varphi_n + \cdots$ sera convergente ou divergente, suivant que l'on aura $m > 2$ ou $m \leqq 2$.

Ainsi la formule (C) pourra être appliquée en toute sécurité quand on aura $m > 2$, et avec réserve quand on aura $m \leqq 2$.

En relisant votre lettre du 22 février, il m'a semblé que vous admettiez implicitement le théorème ci-dessus et le corollaire que j'en ai tiré pour ma formule.

Veuillez excuser l'incorrection de la présente lettre : je souffre d'une légère indisposition.

Je suis avec un profond respect,
Monsieur,
votre très humble et obéissant serviteur
Le Cart

Paris, 151 faub. poissonnière, le 28 mars

Monsieur

Je prépare des élèves pour le baccalauréat, et c'est votre manuel que je fais suivre. Dans ma carrière de professeur, carrière déja longue, j'ai eu au moins deux mille élèves. J'en ai préparé pour St Cyr, pour la marine, pour l'école polytechnique, &c. J'ai été professeur de lycée.

Mon nom, bien qu'un peu obscur, ne vous est peut-être pas inconnu, car j'ai publié divers ouvrages de science, et il a été quelquefois question de moi dans les journaux, en France et à l'étranger.

Quant à vous, Monsieur, vous m'êtes connu, non-seulement par votre enseignement remarquable, mais encore par un acte qui vous a fait beaucoup d'honneur dans l'esprit des honnêtes gens.

J'arrive maintenant à l'objet de ma lettre. Vous avez un nom et une position dans l'enseignement libre; vous devez être surchargé de travail, et moi,

j'en manque, et je se
trouver; car je suis pé
— J'avais une assez bo
composée en grande pa
Elle a été dispersée par
les insurrections. Depui
au moins de 25 à 30
ne me reste plus que t
familiarisé avec
branches des connaissan
n'ayant jamais cess
l'âge de 18 ans, je pu
utile dans une Institu
outre, des relations in
France et à l'étrange
en Angleterre, car ma
Anglais — (de toutes mân
Je vous demande
tout homme a le droi
autre homme, et surto
que vous. Dans les ter
instance, j'ai fait pour
démarches. J'espère qu
moi. J'irai vous voir
heure on peut vous ren
Agréez, Monsieur,

Paris, 1[illegible]

uis pressé d'en
re de famille.
une clientèle
artie d'étrangers.
les émeutes et
1848, j'ai perdu
mille francs. Il
rois pensionnaires
les principales
eurs humaines, et
de professer depuis
is être un professeur
ation. J'ai, en
nombrables, en
r. J'en ai surtout
a femme est
me).
un service que
t d'attendre d'un
ut, d'un homme tel
mps où j'ai eu quelque
r d'autres bien de
on en fera aussi pour
si je savais à quelle
ventures.
toutes mes salutations
Jh. Morand

Ligne - courbe - glissante,
à rendre en un seul mot.

6.

Le latin ne s'y prête guère, ne s'y prête pas. Avec **Linea curva lubrica** pas de possibilité de rendre l'idée claire et nette en un seul mot admissible.
En Grec : ligne courbe = ἡ Χυρτὴ - glissante = ολιΘηρα. De là le mot **Curtolisthe**, ou Curtolisthère. Voilà ce que je puis dire et faire.

7.

Monsieur et Savant Confrère.

J'ai l'honneur de vous envoyer le procès verbaux des Séances. Il est très sommaire comme vous savez mais je vous le aurai remis depis longtemps si j'avais pensé qu'il pusse vous être utile.
Dans une des dernières séances de la Classe des Sciences vous m'avez demandé la notice de feu de Kowalski sur le mémoire de M. Stag. Je lui ai dit que je n'avais pas, qu'en fait de documents je n'avais

que j'ai pris, Verbaux
répondre qu'il vous
c'est le seul avis m
j'ai cru pr entre le Mar

après Vergier
nouvelle aspection de
cry idiotie.

Joseph Henaux.

d'après vos ordres
faire imprimer.
sur laquelle vous me
vous depuis longtemps

Sabine Confirmée par
Archevêque de Lorette

Cannes

Monsieur

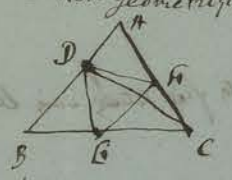
Monsieur Catalan

professeur de Mathématiques.

à Paris

Monsieur

Permettez-moi de vous entretenir un instant du Problème dont nous avons causé dans la rue de l'Ouest et dont voici une démonstration géométrique qui me paraît assez simple.



Soit ABC un triangle circonscrit à une conique; D, E, F, les trois points de contact, on a, par la propriété des segments:

$AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$. (1)

Si de plus DF est une bissectrice de l'angle ADC, l'on a

$AD \cdot CF = CD \cdot AF$ (2)

ces deux équations combinées, donnent

$BE \cdot CD = BD \cdot CE$ (3)

donc DE est une bissectrice de l'angle BDC; et l'angle EDF est droit. mais l'hypothénuse EF, d'après un théorème de M. de Montferrand, coupe constamment la normale qui passe par D, en un point fixe et cette hypothénuse est évidemment la polaire de C; donc le lieu géométrique de C, est une droite, polaire du point situé sur la normale.

il est bien entendu que le point D et la tangente ADB sont invariable.

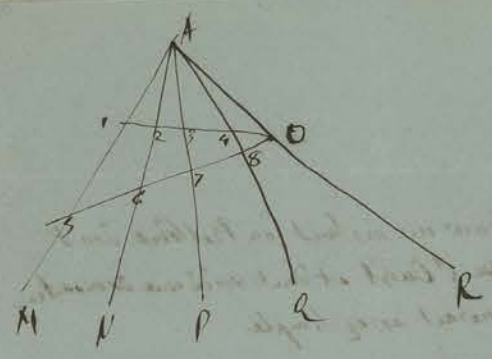
Excusez-moi de vous entretenir de si peu de chose; mais dans l'enseignement, les petites choses ont leur importance

P.S. en prenant la tangente p^r axe des y; le p^t de contact pour p^r origine et mes rectangles, une $Ay^2 + By + Cx^2 + Dx = 0$; le p^t fixe sur la normale a pour abscisse $-\frac{B}{A+C}$; dont la polaire est $By + x(C-A) + D = 0$

T.S.V.P

après le calculation de ses tout devant

O. Terquem



AM, AN, AP, AQ, AR forment un faisceau
même plan et passant par le point donné
O est un point quelconque situé sur une d
par le point O, je mène deux droites que
antes en huit points, qui avec le poin
points; parmi les quels j'en prends cinq
ne sont pas en ligne droite; A sera
Toutes les coniques qui passent par
en A; j'ai été amené à ce théor
et pouvant servir à résoudre ma

de 5 droites fixes situées dans le
A.

droites AR;
longues, coupant les quatre
A forment un système de 9
à l'abaté, de telle sorte que 3
nécessairement un de ces 5 points
9 5 points ~~ont un~~ se trouvent
une d'une grande généralité
nuit problème. est-il connu?

Paris, le mardi soir 13 Novembre

9.

Monsieur,

Comme l'heure de malecon, pour le Mercredi, vient d'être transportée à midi, il me seroit plus commode de causer avec vous demain à l'Ecole même, à 1 heure. Si vous pouviez y venir (avec votre cahier d'épures gravées) nous aurions là, sous la main, tous les éléments dont il est besoin pour tracer clairement la marche à suivre.

Si vous n'étiez pas libre à cette heure là, venez à $10^h \frac{1}{2}$ chez moi, comme nous l'avions d'abord arrêté.

Votre affectionné

Fra Lerouxff

Monsieur Co
l'Ecole poly

Me
Catalan, Repetiteur à
l'Ecole technique
Paris

Mon cher confrère et ami

Je suis tout disposé à faire ce qui dépendra de moi pour faciliter les recherches de M. Delattre mais il me paraît impossible qu'il puisse emporter hors du museum des objets faisant partie des collections. Ce serait une irrégularité trop forte pour que à mon début je puisse en prendre la responsabilité. Qu'il adresse une demande dans ce sens à l'assemblée des professeurs et je l'appuierai. C'est tout ce que je puis faire dans cette direction. En revanche je puis lui donner directement l'autorisation de venir travailler dans nos galeries aux jours réservés et là je serais tout disposé à faciliter les recherches autant que possible.

Je vaisemment chercher votre adresse ces jours ci

pour sans ado
de faire part
appris officiel
mariage. Vot
l'occasion de
manière pl
me hate de
epousé depuis
une Husba
Emma Uber
Chuyen pau
ma décision

Samed

Comme un ballet
qui vous est
seulement mon
lettre me fournit
le plaisir d'avoir
amicale et j'
la raison. J'ai
mais aucun
engagée Mlle
saal et m'applaudis
d'avantage de

bien à vous

Le Comte de Montalembert

11.

Voilà, mon cher ami, les deux billets que je vous avais promis pour la séance de demain. Je crois qu'elle sera intéressante, mais j'en doute fort; je ne sais pas même si la session ne sera pas close demain. Allez toujours à la Chambre vers midi ou une heure; vous verrez la salle d'abord, et puis, peut-être, il s'élèvera quelque incident qui vous intéressera.

Tout à vous

Mercredi 9 Juin

Pouyer

(Après le Deux Décembre) 12.

Merci, mon cher Patalon, de votre témoignage d'amitié; je songerai moi-même à vous quand on me montrera votre lettre. Grâce au ciel ni vous ni les vôtres n'avez rien. Comme vous le pensez bien je me suis hâté d'enlever les armes, aussi suis-je accusé *in petto* par beaucoup de gardes-nationaux de la 2me de Complicité morale, ce qui m'a valu trois visites domiciliaires à l'effet de saisir des armes qu'ils n'ont pu trouver.

Que de courage! que de cruauté, ce qui d'autre, grand Dieu! qu'adviendra-t-il de tout cela? Dieu seul le sait. mais ce que je puis vous dire, ami, c'est que mon cœur comme le vôtre, saigne profondément devant de malheurs et que l'avenir m'effraie!

Votre ami bien

[signature]

vieille chaleureusement chez vous, aussitôt que nous ensemble j'irai vous voir. adieu.

mardi à 1h.

13.

Mon cher monsieur Cattelan.

pour vous quelque chose de positif et de tranchant pour ou contre l'opportunité qu'il y a à traiter M. de Wertheim et Siédès ?

Je viens d'être nommé membre d'une commission chargée d'étudier cette question — n'ayant rien vu par moi-même je ne puis que recueillir des témoignages et j'attacherai beaucoup de prix au vôtre. Je n'en puis assez d'ailleurs que dans le limite que vous m'indiquerez.

Votre tout dévoué

V. Bethaud

— Vendredi —

14.

Une indisposition m'oblige à vous prier Monsieur de suspendre quant à présent vos cours du soir à la rue du pont aux choux : c'est un contretemps pour moi dont je suis fort contrariée au reste j'espère que l'étude de la perspective n'en ira que mieux quand je la reprendrai.

J'étudierai si je puis et tâcherai de résoudre (s'il est possible) ce terrible problème qui m'est proposé mettre un cube en perspective

recevez mes civilités

Olympe de Villiers

Monsieur
rue du

A Monsieur
Catalan fils
f.gt St Antoine N° 123

29 Mai 15

Mon cher maître,

Je vous félicite très sincèrement ! vous avez eu la même maladie que Victor Hugo et vous êtes guéri. Quelle gloire et quel bonheur ! Il est vrai que plus tard, malgré tout votre mérite, vous n'obtiendrez peut-être pas les honneurs du Panthéon, mais il faut des compensations en ce bas monde.

Je pensais bien que mon théorème I était connu. Mr Halphen, que j'avais interrogé à ce sujet, m'a répondu que le théorème avait été donné par Mac-Laurin. Mais j'aurais voulu savoir dans quels termes et dans quel ouvrage il était énoncé, si la démonstration était algébrique ou géométrique etc.

Quant au théorème II, je vous l'avais proposé comme une petite devinette sachant bien que vous en trouveriez la démonstration pour peu que vous voulussiez vous en donner la peine.

Mais il n'en est pas m
formules donnent tou
première et de seconde
La solution est de prem
espèce selon que les
contiennent ou non
Quand la première m
proposée est du second
(8) de mon mémoire (
donnent des solutions
mais pas contre, ell
général, connaître
Au delà du second
aucun moyen de sa
a des solutions de 2n
même qu'il y en a
un beau théorème
celui de Fermat, Cel
$x^n + y^n = z^{n+1}$ a une
dans lesquelles les
ont un facteur commun
pas d'autres.

nons vrai que les
tes les solutions de
espèce (Je dis que
niel ni de seconde
valeurs des inconnues
un facteur commun),
embre de l'equation
degré, les formules
(Annales 2ème série tome XVII)
page 4
de seconde espèce
es ne font pas, en
tenues les solutions
degré, je n'ai
vait à priori s'il y
ne espece et je doute
t. Ne se trouve pas
aussi beau que
ci: l'equation
infinité de solutions
valeurs des inconnues
en, et elle n'en a

J'en viens maintenant à votre équation $x^n+y^n+z^n=t^n$ (Je l'ai bien lu). Je ne me suis pas occupé spécialement de cette équation, mais (loco citato) je donne la solution d'une question plus générale: ξ représentant un polynome quelconque du second degré homogène à deux variables, le second de l'équation $\xi=t^n$. J'étudierai plus tard, quand j'aurai terminé le travail qui m'occupe en ce moment, si la méthode peut s'étendre à un nombre quelconque de variables.

Je lirai avec le plus grand plaisir l'analyse de vos travaux dont je connais déjà une partie grâces à vos communications obligeantes

Salut cordial

Debaves

P.S. Mes respects à Mme Catalan. Ne lui avez-vous pas donné quelques printemps de trop? C'est une si bonne chose que le printemps, que vous seriez A D
excusable.

16

Mon cher Catalan

Monsieur Arago me charge de t'envoyer Mr Haenel jeune homme auquel il s'intéresse vivement. il désire que tu puisse lui donner des leçons de Mathématiques transcendantes. en tu en sauras, en faisant cela le jeune homme, beaucoup plus que je ne puis t'en apprendre

Ton tout dévoué!

Laugier

Monsieur E. Catalan

17.

Mon cher ami

Votre témoignage rendu à la vérité & souvenir affectueux, est venu tout à la fois émouvoir le cœur de l'homme politique & du vieux camarade. De toutes les preuves d'intérêt que j'ai reçues, la vôtre a été l'une des plus douces. C'est un dédommagement des flots d'injures & de calomnies dont m'ont abreuvé les rapports & la bataille. Le droit de réunion n'a pas excité à Paris dans cette dernière lutte électorale

Un comité composé d'une vingtaine d'orateurs, tous condamnés à la prison, & tous parfaitement libres, réelle à deux mille surveillants comme public, se sont emparés de toutes les réunions sans exception. Le bureau était toujours près par eux, les orateurs inscrits c'étaient eux. Deux fois pour complaire à

Nos amis, j'ai d
- liation de leur contact.
Je puis dire, sans vanite
ou dominer. Mais
application du droit le
étouffera le droit
l'A n'y avait pas
cette absorption par
la tribune.

Il y a eu un
vertige qui a égaré
Paris, Mais les qu
Il résulte seulement
Bagatelle un fait im
que les travailleurs
non ceux qui étaient
adversaires les plus
Gouvernement personnel,
qui pourraient pour
à Lyon et à
a été sauvé par les

n subir l'humi-
Deux fois
que Je les
cette fausse
plus sûré
lui-même,
réaction contre
Pirates de

moment de
le peuple de
ersion d. Versorme,
de toute cette
ontestable, c'est
st cherché à éteindre,
ent vraiment les
edoutables du
mais comme
l'être.

Paris Rapport
ygant du Gouvernement

pour remettre les Orateurs de la Gauche
& effrayer les Electeurs du second tour
de scrutin, & emporter les Ballotages
par le feu! Le Gouvernement a joué
gros jeu. Les Vainqueurs sont excités ne
s'apaiseront pas facilement. &
Nous marchons vers un inconnu
terrible.

Bientôt les scrutins de Paris
seront connus. ma lettre partira-t-elle
ce soir, ou demain? Vous le verrez
par le J.S. En attendant
J'ai voulu causer avec vous, & Je
me suis procuré le plaisir de
vous renouveler l'assurance de mon
entier dévouement

Garnier Pages

4 h. J.S Je laisse aux journaux de demain
de vous faire connaître le résultat. Probabilité
en ce moment pour moi & pour Thiers - Doute pour Jules
Favre & Berry.

18

Mon cher monsieur Catala

J'ai reçu une réponse de Mr Daisy. Il accorde toute liberté pour traduire Cayon et corriger les ouvrages. Voyez donc votre libraire quand vous viendra et comptez bien aussi quand il le faudra pour partager avec vous le travail de révision.

Votre dévoué et affectionné

J. Bertrand

Général Poncelet

Samedi 19

Mon cher et savant Professeur,

Je me hâte de vous remercier de l'empressement que vous avez mis à me transmettre les indications de M. Sauvageon. Il me paraît, ainsi qu'à Mme Poncelet, difficile de vous installer dans un pavillon probablement assez petit, et qui a d'ailleurs pour nous l'inconvénient grave, de n'être pas meublé; d'autant plus que l'état de ma santé me forcera, je le crains, à me rendre aux Eaux cette année.

Je tiens note toutes fois de la proposition, au cas où elle pourrait convenir à quelqu'un de vos amis.

À l'égard de vos formules et transformations de séries indiquées dans votre lettre, et dont je vous remercie également, elles montrent toute l'ampleur que vous possédez dans la

20

Voulez-vous, Mon cher Catalan, accepter ce petit volume, sans prétention scientifique, et, comme tel, méritant votre indulgence ? Vous savez quelle est la pensée qui me l'a fait écrire. Ici, l'intention en beaucoup.

Tout à vous d'amitié

A. Jaillemain

91.

Cher Monsieur,

J'ai retrouvé en effet vos ouvrages à l'École modèle. Comme ils y étaient arrivés sans aucune indication, le Directeur a cru que c'était un libraire qui les avait envoyés à Vincennes; il les avait mis de côté en attendant qu'on vînt les reprendre et n'avait pas cru m'assurer de m'en informer.

Je regrette fort
qui vous a fait
à un manque
Je suis
marque de Sym
votre part.
=me aussi imine
pour notre cause
particulier.
Soyez persuadé,
que le Comité

e malentendu
voir un moment
d'égards. —
sible à cette
pathie de
ant d'un hom=
ent elle a
un prix tant

cher Monsieur,
Cartagena ces
—

sentiments quand je l'aurai informé de votre don généreux.

J'espère que quelque jour vous réaliserez la promesse faite à Mme Juliette, ne fut-ce que par amitié pour elle et que l'Ecole modèle pourra s'enorgueillir d'employer une Géométrie, faite spécialement pour elle, par l'un des Mathématiciens le plus justement estimé de notre époque. —

En attendant le p
vous serrer la ma
présente chez Mo
bien cordiales salu

C

Monsieur Catalan,
l'Université de Li

hlaisir de
ui, je vous
ntrieur, mes
latins.

Pils

Professeur à
ège

Très respectable Monsieur et professeur

J'ai reçu votre honorable lettre du 9 courant dans laquelle vous me communiquez des observations relatives à mon mémoire sur l'expression des intégrales elliptiques en intégrales définies. Vous voudrez m'excuser si je crois convenable de vous soumettre à ce propos ce qui suit : 1° C'est pour éviter que le développement de l'intégrale de première espèce selon les puissances impaires de $\tan.\varphi$ deviennent divergentes lorsque φ surpasse $\frac{\pi}{2}$ comme je me trouve avoir indiqué page 7 et c'est pour éviter aussi que tous les termes de la (8) deviennent infinis pour l'intégrale complète, c'est pour éviter tel inconvénient je dis, que j'ai transformé la (8) en (9) laquelle se trouvant exprimée selon les puissances impaires de $\tan\frac{1}{2}\varphi = t$ outre qu'elle n'est pas sujette aux inconvénients indiqués coïncide aussi avec la série de Gudermann, étant les coefficients de l'un et de l'autre série liés entre eux par le moyen de l'équation (1)

laquelle peut aussi s'écrire

(2)

2° J'ignorais absolument q
mémoire sur la fonction
vous faites mention dans v
avez donné le développeme
complet de première espèce
une série très convergente,
je n'aurais pas négligé d'en
d'en profiter. Désirant en
connaître et d'étudier le
j'ose vous prier de m'ind
libraire ou éditeur je pour
Moi aussi, il y a déjà un
me suis occupé de l'integ
première espèce dans un m
développement en series
radical exprimant la di
de deux planètes, Ce mém
par extraits l'année 18
les actes de cette Académ
& vol. 17). L'édition étan
longtemps et n'en ayant
exemplaire pour vous en

sous la forme

dans
ne votre second

X (P. 82) dont
otre lettre, vous
ent de l'intégrale
moyennant
Si je l'avais su
faire mention et
attendant de
mémoire en question
iquer chez quel
rai me le procurer.
demi siècle.) je
rale complet de
émoire sur le
les puissances du
tance mutuelle
oire a été publié
840 et inséré dans
ie Giornia (série
el épuisée depuis
pas même en
faire hommage

je me limite à vous transcrire (pour ce qu'elle vaut) la série que j'y ai mise pour la valeur du même intégrale qui est la suivante

(3.)

Dans cette série qui donne approximativement la valeur de l'intégrale complet de première espèce la quantité λ représente le logarithme hyperbolique de .....

3° La formule ..... de la page 11, je l'ai tirée du mémoire de Gudermann publié dans le journal de Crelle. Ce géomètre n'ayant fait aucune mention sur la correspondance de cette formule avec la fonction X, je n'ai pensé à autre chose qu'à obtenir immédiatement, (ce qui est très facile) la dérivée cxcesima de ..... afin de comparer l'expression de A_x obtenue par cette voie avec celle du même A_x indiquée dans la page 11 et représentée par la (16). Il m'était vraiment facile d'exprimer la quantité A_x aussi bien que la quantité B_x en fonction de t, mais je ne l'ai pas fait pour ne pas m'arrêter plus longtemps sur un argument que je traitais incidemment. Les quantités déjà nommées

changeant la ..... et fa
formule de Rodrigues d
(4) deviennen
L'équation (14) est en su
que l'équation (6)
dans votre lettre et qu'on
par M. Bertrand dans son
du Calcul Différentiel in
(14) placée .....
(7) Lagr
la substitution de (8)
parfaitement avec l'éq
ci dessus. (9)
Je vous remercie sincèr
que vous m'avez données
j'apprends avec plaisir
actuellement occupé a
(10)
des conséquences qui
très importantes.
4° Avec l'intention
exemple d'utile appli
(3) et (6) exprimant le
première et de seconde

isant usage de la
nt on a
t (5)
bstance la même
quelle vous m'indiqu
trouve aussi marquée
n classique traité
tégral. En effet la
.... prend la forme
elle en vertu de
coïncide
uation indiquée

ement des nouvelles
ur la fonction x_n et
que vous ête
déduire de la formule

sans doute seront

de donner un
cation des formules
s intégrales de
espèce en fonction

des intégrales définies, je m'occupe nouvellement de la superficie de l'ellipsoïde réduisant par ton moyen à la forme simple connue la double intégrale exprimant la dite superficie et pour cela il me semble d'avoir réussi d'une manière facile et différente de celle qu'autrefois j'ai tentée et dont vous parlez au commencement de votre lettre. Je profite en attendant de cette occasion pour vous manifester que je n'ai jamais eu de doutes sur la simplicité et l'importance de votre méthode ingénieuse touchant à la superficie de l'ellipsoïde l'ayant toujours beaucoup appréciée. ~~et à présent~~ A présent après tout ce que je vous ai dit, je vous demande pardon du dérangement et je vous prie de vouloir bien me continuer votre estime et votre bienveillance.

Votre très dévoué et assez vieux collègue de Catania

Zuz (Engadine - Suisse)
13 aout

23

Illustre confrère et cher ami,

Je suis en possession de vos bonnes lettres de 22 juillet et 7 aout ; du fond de mon cœur déchiré je vous remercie, aussi au nom de mes enfans, de la part que Mr Catelan et vous prenez à notre malheur. Pendant les deux derniers mois, ma pauvre femme avait souffert continuellement les douleurs les plus atroces qu'un être humain puisse endurer ; ainsi, à ce point de vue, la mort a été une véritable délivrance pour la pauvre martyre, qui jusqu'au dernier instant de sa vie a conservé entière la lucidité de son intelligence. Mais on ne peut pas se débarrasser de tout sentiment égoïstique ; nous qui survivons à elle, nous sommes ~~beau~~ très malheureux. Elle avait été pour moi l'épouse et l'amie fidelle et sage pendant 28 ans, elle avait donné de la consistence à mon caractère, elle

m'avait soutenu et en
les circonstances diffi
elle m'avait rendu p
tranquille et l'occu
sans interruption, e
la charge entière de
stique et de l'éducat
Et pour mes enfans
sage et prévoyante
nergique, qui av
un caractère fort e
des sentimens nobles
maintenant .... elle n
toujours.

Merci, mon ami
encouragement ; o
il faut se réfugier
et se consoler av
chères qui survi
à tout prix de se m
de celle qui n'est

ouvrage dans toutes
les, de mon cœur
possible l'étude
pation scientifique
e prenant, elle seule
l'administration domes-
tion de nos enfans-
elle était la mère
amoureuse et é-
ait leur donné
t loyal, avec
et sérieux. Et
ous a quitté pour

, de vos affections
ui vous avez raison,
dans le travail
ec les personnes
vent en cherchant
aintenir digne
t plus avec nous

mais qui vivra toujours dans notre pensée!

Le 23 juillet j'ai quitté Rome avec Victor et Italo, et nous sommes venus ici, dans ce coin des Alpes, y chercher un peu de tranquillité pour nos esprits, ainsi que l'air pur et le mouvement pour notre santé. Celle-ci est maintenant améliorée, et j'ai aussi de bonnes nouvelles de ma fille aînée Hélène qui, naturellement se trouve avec son mari (près de Macerata). Pour elle aussi la mort d'une mère chérie a été un coup rude; mais elle peut trouver, mieux que nous, des consolations dans les soins maternelles pour son petit enfant (Hector), qui croît sain et robuste.

Je resterai ici encore deux semaines et après j'irai probablement visiter mes parents et mes amis de Lombardie, et le 1er octobre au plus tard je rentrerai à Rome — ainsi je n'irai pas au

congrès de la Rochelle-
des dispositions d'esprit
m'obligeraient beaucoup
lettre à Mr. Tchébychev
remercier pour moi, p
bien voulu prendre à mon
pouvez bien croire que
Congrès de Clermont-Fer
au Puy-de-Dôme sont i
dans ma mémoire.

Je vous remercie de
la carte postale du jeune
tout de suite. Vous êtes m
quant à moi je déplore l
sot de notre ministre de l'
rons dans des jours meilleur

Mille choses à Mada
part et de celle de mon
avec moi. Conservez-m
amitié ; je serai to

PS. La maladie de ma pauvre
femme m'a empêché de vous
remercier des mémoires que
vous avez eu la bonté de
m'envoyer.

Je ne serais pas dans
pour cela. Vous
, à l'occasion d'une
vous vouder le
om la part qu'il a
affliction. — Vous
tous les détails du
and et de l'ascension
ugurés à toujours

m'avoir communiqué
Cesaro ; j'ai lui écrit
véritable père pour lui ;
l'esprit misérable et
l'instruction publique. Espé-
!

ame Catalan de ma
enfans qui sont
ui votre précieuse
ugiez votre
Collègue affectionné
L. Cremona

Paris, 31 mars.

24.

Mon cher camarade,

Je suis honteux de mettre tant de retard à répondre à votre lettre. Je dois vous dire pourtant que je n'ai pas perdu un instant à m'occuper de votre recommandé M. Gaignard. On est ici très satisfait de ses services. Son traitement est de 3300f. On a pris note pour lui donner une augmentation de 300f, et je tâcherai que cela soit fait au 1er juillet prochain, les avancements ne se donnant que deux fois par an.

Vous pouvez compter, mon cher camarade, que je n'oublierai pas

l'intérêt que
à ce jeune h
d'hist gnds.
Tout à

J'ai eu le chagrin
d'assister au jeun
camarade Cham
— garnisons Amiens
Cadalen. Tenor
not engd.

vous prouter
mm, et qu'il mérite

Veut cordialement

Sherly

, la semaine dernière,
veilles à notre
al. Nous nous dé-
lement mon cher
nous bien, et terminer

Monsieur Camarade,

Je ne savais pas que vous fussiez de l'Académie de Belgique, je vous fais mon compliment.

Puisque votre Académie n'a reçu qu'un mémoire d'analyse, celui-là est le mien, sans conséquence.

Ignorant encore que le verdict fut prononcé, je me disais que, aux termes du concours, me faire connaître et vous avoir élu vous expliquait mon silence par ce motif.

Mais l'empêchement n'existant plus, je me vois aucun motif de ne pas vous dire tout simplement : absum qui feci.

Toutefois ne connaissant pas encore les termes du rapport, je ne vous fais qu'une confession auriculaire, non destinée à la publicité, même en Belgique. C'est à dire que je vous prie de rester le fidèle dépositaire du secret, jusqu'à nouvel ordre.

Je vais faire demander à Bruxelles le Compte rendu relatif à la séance du 15 décembre, de votre Académie. Quant à l'annexe dont vous me parlez, je serais heureux d'en avoir une copie, si je puis l'obtenir sans un nouveau, et, à cet égard, je

vous demande pa

Je ne vous p
s'en Convaincra
je ne doute aucun
que la commission
son examen.

Mais je pense,
le pressentiment
témoin, je pense
ne vous étonne p
Comme pour que
de académie qui,
s'fère à tous c

Quoi qu'il en so
obligé de vous dire
que j'avais voulu
points de la défe
pas faibles, o
qui sont certain
d'autres moins sire

Vous me demand
est traité au Li

Je crois que u
hypothèses ne rend
compte des faits.
être au moins trop
fois comme moi
fois comme Catth

protectionnistes
discuter nos conclusions,
par les considérants et
ment de la loyauté
a dû mettre dans

et, du reste, j'en avais
en voyant mon
que mes travaux antérieurs
jugés suffisamment
vous pouvez juger
naturellement, de
les autres.

soit je vous serais bien
que vous avez pris
d'autres et quels
aristocratie vous ont
présenter des lauriers,
ment comblés dans
déjà publiés.

ndez le Mac-Mahon
vraiment idiot.
l'un ou l'autre des deux
ait suffisamment
le bonhomme doit
thment idiot : un
litain ; un Lavoude
otique et une Hardion

fait comme juché à perte de vue — pour
lui, qui en l'a jamais eue bien longue

Je pense que votre désentissement au sujet
de mon mémoire se résoudra par une explic-
cation à pour pris et en calibre.

bien à vous

[illegible]

Ministère
de la Marine
et des Colonies

5 Juillet.

26

Mon cher Catalan,

Tu as encore le cœur chaud comme aux jours de notre jeunesse, tant mieux, dis-le moi, car le mien s'est beaucoup refroidi.

L'armée compte cher à la France. — En outre, il est probable que nous n'avons pas voulu y encourager le mariage. C'est en peu pourquoi je suis resté vieux soldat vieux garçon ; une armée de célibataires vaudrait cette terrible armée de jésuites qui dominent certains pays et veut dominer le monde. —

une veuve de Général de division a 1950 f de pension ; et tu sais

Si un Général, do
ordinaire, peut
ne nous révolte
outre je réponds,
réponds maintes fo
qui choisit la c
à quoi il s'engag
aura droit - - - o
Dura lex ; sé

Ce voilà donc p
c'est complet, p
ton dévo

en les circonstances
économiser .. ?
ton pas. — En
ici, ce que je
bois, l'officier
arrière fait
e, à quoi il
r, il a choisi. —
d lea. —

argé d'harmonie
physique & morale.
ré Camarade
h Pelaud

rue Monge n° 23 x 7

Paris lundi 2 oct.

27

Cher grand papa,

Reçu votre bonne ~~x~~ excellente lettre hier et la carte postale ce matin; j'avais tâté le problème et avais vu sa non-généralité? Peut-être marche-t-il avec restrictions.

Je vois galope que je serais au lycée Charlemagne en élémentaires, et, qu'avant peu, peut-être 2 semaines, je serai en spéciales à Paris. J'incline ~~[illegible]~~ ai Paris de la N.-D. N., là c'est pénible.

Je vous écris de plus en plus à la vapeur, car mes

Mon coup est mes peu bonne

Mon coup partout Mon de bonne manière et l'amitié

modifier est en wa
l'installer mercr
rue Monge

Papa, Maman et
Lucette très-heureu
~~x~~ recevoir Gra
et Belle et Bon
Jouta

Je vous écrirai pl
après installatio
qq. observations n
vos Nouvelles de
d'Euler..

gen, je
edi
56

les petits-enfants
e d'y voir
ud Sapin
ne Mainay.

vers
Eluay

lugnement
n. Je vous ferai
ouvelle sur
Bernoulli et

Il y a 4 séries

$$1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(n-1)^{n-1}$$

$$1^{n-1}-2^{n-1}+3-\cdots$$

$$1^{n-1}+3^{n-1}+5^{n-1}+7^{n-1}+\cdots$$

$$1^{n-1}-3^{n-1}+5^{n-1}-7^{n-1}+\cdots$$

Sommes des $(n-1)^{\text{ièmes}}$ puissances

semblables alternées $\pm$ } des nombres naturels

semblables alternées $\pm$ } des nombres impairs

donnant lieu à l'emploi de nombres

$$B_n,\ P_n,\ R_n,\ E_n$$

qu'il y retrouve dans les séries inverses prolongées indéfiniment

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots$$

$$\frac{1}{1^{2n}}\pm\frac{1}{3^{2n}}\pm\cdots$$

et aussi dans les
de $\underline{\operatorname{tg} x_1}$ $\underline{\cot x_1}$
Les 2 importants
car ils sont autres
Je trouve les analo
plus loin avec p
les f. elliptiques &
Votre intégrale

Cela a été trouvé très chic à Clermont

~~Ou~~ entre 2 racines
doit donner, comme
observer à Clermont
parle calcul des
prenant deux racines
Pensez-y. — Simon
la publication de

des développements
ses R_n correspondant
dent P_n et E_n.

---

logies beaucoup
olynomes, pour
abélienne.

$\int_a^b$ de la fonction de
de mon. ligne
je l'ai fait
s, plus encore,
résidus, en
ing de signe contraire,
j'y penserai après.
otre travail.

Bruges, mercredi 7 1/2 h. du soir.

Cher Monsieur Catalan,

28.

J'aurai le plaisir d'aller vous serrer la main demain matin à l'Hôtel de Flandre vers 10 heures, et j'espère que vous ne me refuserez de partager mon modeste dîner.

Je me borne à ces quelques lignes, car c'est à peine s'il me reste le temps d'aller jusqu'à l'hôtel avant de me rendre au théâtre.

A demain donc, et bien à vous.

F. Gravrand.

2

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
ET SPÉCIALES

Adresser les communications
à M. G. de LONGCHAMPS
DIRECTEUR-GÉRANT
15, rue de l'Estrapade, 15
PARIS

Librairie Ch. DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris.

29.

Paris, le

Mais enfin — la chose essentielle — celle que vous m'avez signalée dès le début — à laquelle je vous ai répondu déjà — c'est — l'intégration de l'équation de Riccati — dans tous les cas.

Liouville a démontré, et la chose est classique depuis longtemps, que l'équation n'est intégrable (il est bien entendu avec les fonctions ordinaires) que dans les deux cas que vous rappelez.

Mais le mérite de mon mémoire, (s'il en a un) c'est d'avoir trouvé les nouvelles fonctions qui permettent de calculer l'intégrale de l'équation dans le cas général.

Ceci fait
simplement
en ce
etc...

Il
Contient
que
ceux
différent
partie
du m
Nous
dont
ce mar

Il
fait
intéressant
[illegible]
Goûte

Bruges, mercredi 7 ½ h. du soir.

Cher Monsieur Catalan,

28.

J'aurai le plaisir d'aller vous serrer la main demain matin à l'Hôtel de Flandre vers 10 heures, et j'espère que vous ne me refuserez de partager mon modeste dîner.

Je me borne à ces quelques lignes, car c'est à peine s'il me reste le temps d'aller jusqu'à l'hôtel avant de me rendre au théâtre.

A demain donc, et bien à vous.

F. Gravrand.

l'arc d'ellipse n'est pas
ble par les fonctions
ement périodiques, mais il
tisfiable par d'autres fonctions;

l m'a paru très curieux de
ter et de faire connaître
, une singulière formule de
ence, même de chiffres
ts, conduisant à une
notable de l'ancienne analyse,
m temps qu'elle dénotait
ce à de nouvelles fonctions
l'application était si
nable.

suis encore surpris que ce
ne vous ait pas vivement
'est que vous n'ayez pas
, surtout venant d'un ami,

(étant bien disposé pour l'heure, par conséquent) une chose qui a frappé tous ceux à qui j'en ai parlé jusqu'ici. Si vous voulez que je vous dise le fond de ma pensée, je crois vous trouver frappés de vos critiques, auxquelles il me sera facile de répondre un jour en l'absence complète d'éloges et je reste persuadé que je ne me suis pas fait comprendre de vous.

Quoiqu'il en soit, une idée mère technique ne doit pas altérer, j'y crois plus d'accord que vous, des relations qui ont été, depuis 20 longtemps, inaltérablement cordiales. Mais je ne suis pas autrement étonné que Madame Catalan ne vous soutienne pas dans le vote que vous avez eu

Decr
Mes
Bien
tôt ?
Beau
faut
Cond
Cupie
un
le cas
ignoi
Chou
gro
J'ai vo
une
approu
par le
Deputé
se trou

Je m

Bruges, mercredi 7 1/2 h. du soir.

Cher Monsieur Catalan,

28.

J'aurai le plaisir d'aller vous serrer la main demain matin à l'Hôtel de Flandre vers 10 heures, et j'espère que vous ne me refuserez de partager mon modeste dîner.

Je me borne à ces quelques lignes, car c'est à peine s'il me reste le temps d'aller jusqu'à l'hôtel avant de me rendre au théâtre.

A demain donc, et bien à vous.

F. Gravrand.

r Sarre, en cette circonstance.
femme, le rôle comme les
me, c'est-elle toute en-faite
) ne comprend rien aux
ullies, – mais elle trouve quand
de bien grands raisons pour
eather un ami qui s'était
'en vous et avait tolléré
jugement qui devait, dans
~~[illegible]~~ déplorable, rester
du public. Il y a là quelque
qui le blesse et pour moi,
doit juger plus sévèrement,
dans votre façon d'agir
méthode que je ne puis
ver et qui m'a fait en la pesant
que j'ai senti que l'amitié
tieux que je vous avais voué
avait amoindrie et froissée.
si vous me demandez en conclusion
vous dirai, en toute sincérité, que

Monsieur le Président

Je m'acquitterai bien volontiers de l'hommage que vous vous proposez de rendre à M. Catalan au nom de ses anciens élèves. Quoique m'étant éloigné des études mathématiques en raison de la nature de mes travaux, je n'ai pas oublié combien les leçons de M. Catalan étaient claires et fortes, combien il était bon et encourageant pour ses élèves; et me tient le grand exemple qui il leur a donné en sacrifiant son avenir à sa foi politique et en supportant avec constance toutes les difficultés jusqu'au moment où l'Université de Liège lui a offert la situation stable qu'il ne pouvait trouver en France.

La Belgique a aussi réparé bien

Les fautes dont la
responsabilité qu'
pas répondre à ce
l'homme que v
M. Bartalani esp
sur votre Mémo
d'Egyt et à ce titre
lui renouvelai
vantes m'appela
à vous.

Veuillez agré
Dresden l'expr
sentiments les

France pour la
voigt aller et à leur
sentiments véritables
nous allez faire à
veillez avec justice
ments et sur votre
aussi je vous
à avoir bien
à ses fondées

Monsieur le
cation de nos
plus distingués

C. Friedel
de l'Institut.

31.

Mon cher M. Catalan

Je vous envoie l'exposé de mes travaux scientifiques pour distribuer aux membres ~~de~~ de la Société, si vous le croyez nécessaire, ainsi qu'une réponse aux accusations portées contre mes idées théoriques. Je serais voir Foucault et je vous tiendrai le pot aux roses. Personne ne connaissait la théorie qu'on attaquait et ~~c'est~~ l'opposition que m'a été faite n'est tout simplement que le résultat de la camaraderie. C'est parce que je suis un amateur qui n'est pas professeur qu'on ne veut pas de moi et je serais que lors de la prochaine élection le sera la même chose et moins qu'à celles j'ai envie de voir pour que le

Candidat
qu'il est
moi se fa
Chamer.
J'ai vu
la presse
m'a dit
a Chamer q
véritable
assure que
moi seu
Ceux que
depuis
Lon

gerts pertant et
place en regno à être
emblé par lavoir de

remercier de toute
d'amitié que Vous
nez et comme d'ut
d'un Général des
mis je suis Vous
vier ainsi été pour
ami plus devoué que
dèles mes amis
ses années
t à Vous

Le Dr Minard

Monsieur Cattalan
Membre de la Société philomatique
8 rue Dauphine

Paris

Mon cher Catalan,

Si je suis en retard pour vous répondre ce n'est ni par oubli ni par négligence. J'attends avec impatience la rentrée de Vacherot qui est à la campagne. Aussitôt mon retour je compagnerai les amis pour aviser et arrêter le jour de notre entrée en campagne.
En attendant je vous remercie de votre magnanime sympathie et accepte d'avance votre manuscrit. Il doit y avoir d'bonnes vérités à dire et à retenir.
Nous sommes en présence de graves événements. Si l'Assemblée de Versailles fait son devoir nous verrons la grande exilée Paris et bas du Rhône la bonne cause et plus près de l'infâme ligue de la fortune. On ne vit pas dans une mer houleuse semblable on meurt du bout au bi j'espère le lyrette nous

Monsieur,

adical un Journal hebdomadaire
mique destiné à attaquer de
autorité sous toutes les formes et
les questions morales politiques
ns les premiers jours d'Octobre
a pas l'avoir d'un homme et sa
de rédaction composé de sept
ur leurs antécédents.
l est illogique de combattre le
nnel par un Journal personnel
rédacteurs sont MM Vacherot,
P. Joigneaux, Rogeard, J. Barni,
, Catalan, A. Marais, Paul

i a accepté la présidence du comité
un programe qui sera publié
numéro.
ce que vous voudrez bien nous
le preuve de votre dévouement.
ous est chère,
agréer mes salutations fraternelles.

L. Goudounèche.

al. rue Coq Héron, N° 5. à Paris.

LE RADICAL

Journal hebdomadaire

DES RÉFORMES MORALES, POLITIQUES ET SOCIALES.

PARAISSANT TOUS LES DIMANCHES

ABONNEMENTS

Paris		Départements	
Un an	12 fr. c	Un an	14 fr. c
Six mois	6	Six mois	7
Trois mois	3	Trois mois	3.50

Pour l'Etranger, le port en plus.

BULLETIN DE SOUSCRIPTION

Je soussigné _____

demeurant à _____

déclare souscrire pour _____ Abonnement au Journal le Radical.

_____ le _____ 18 . .

Remplir la formule ci-dessus et l'adresser signée, à Mr GOUDOUNÈCHE rue Coq Héron, 5, Paris.

Imp. E. Pepin 15, rue de Thiers

pourrions bien nous devo-
Dans cette opposition
je vous

ci-joint du Bulletin
de Pékin —
le cas échéant, je
certain à les acquitter

[illegible]

[illegible] mes cordiales

[illegible]

de souscription [illegible]

[illegible] de mes [illegible]

[illegible] les [illegible]

Monsieur Camarade,

Vous ne m'avez pas mis sur votre lettre que vous venez de retrouver la notice de M.r Boucingaqui, mais vous avez sans doute oublié de la joindre au paquet que vous avez eu l'obligeance de m'adresser, car je ne l'y ai pas trouvée.

J'ai envoyé deux fois ensuite chez Gauthier Villars et chez Lebon pour l'avoir, mais inutilement, ou voyez la mi dom. Les brochures que j'ai en datant par de ces dernières années, j'en ai absolument besoin de la notice pour en faire un compte rendu en complet.

Mille amitiés de votre dévoué

[illegible]

10 Place Pereire à Courcelles,

Paris.

34.

Mon cher Catalan,

Ci-joint le reçu ainsi que l'adresse de M. Bastide avec legal. Je viens chez du bois et tout ~~est~~ massif s'il avait ~~le~~ tout le vous rencontrer ~~à~~ Mas pourrez disposer de mes heures sans lui faire grand plaisir.

Salut et Cordialité

Coedoens ch

Bouch. de Conseillers 13 lanterne journée

Paris

35

Mon cher Catalan,

J'apprends avec bien du chagrin l'affreux malheur, qui vient de te frapper. Dans l'épreuve d'exil auquel tu t'étais condamné, c'était une consolation d'avoir emporté avec soi de Paris quelques uns de tes plus chères affections. Voilà une nouvelle très cruelle à joindre à toutes celles que avait prodiguées ton temps. Dis à ta femme combien je prends part au coup qui vous frappe.

A toi de cœur

Eug. Pelletan

36

Monsieur Catalan

Le raisonnement pour prouver la convergence de la série n'est pas assez développé dans la 1re édition de mon Algèbre. Je l'ai développé davantage dans les Éléments suivants. Je vous envoie un exemplaire de la 3e édition; si vous avez la bonté de lire les pages 46, 47 et 48, je crois que toute difficulté disparaîtra.

Mille amitiés.

Briot

Paris 21 février.

Ирмие

w Catalan.

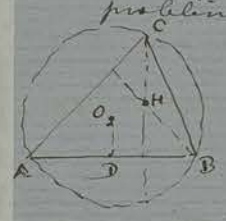
Paris Dimanche matin

37

Mon cher Maître

Votre ouvrage sur les problèmes de Géométrie, ne renferme, autant que je puis me le rappeler, qu'une suite d'énoncés accompagnés des démonstrations à l'appui.

N'y aurait-il pas quelque avantage à grouper autour d'une seule, les propositions qui ne sont que des formes diverses ou des conséquences de cette seule proposition? Cette réflexion m'est venue à l'occasion des 2 problèmes d'hier soir.



L'un résulte de ce que $CH = 2OD$

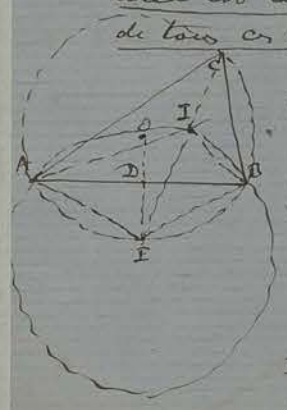
On s'appuie sur cette propriété pour arriver à beaucoup de résultats; elle est donc importante. Mettons là en relief et puis ~~[illegible]~~ commençons à la suite des conséquences - - - - etc.

Ex. Lorsque des triangles ayant une base commune AB sont inscrits dans une même circonférence, le lieu des points de rencontre des hauteurs est une circonf. égale à la circonf. donnée

etc etc.

Un problème de ce genre appelle tout de suite à l'esprit celui-ci:

Quel est le lieu des points de rencontre des bissectrices de tous ces triangles; dans le sens où conduit les mêmes à votre 2e problème. Et aussitôt de lieu



L'angle en I est constant donc le lieu est une circonf.

Comment est-elle placée? pour cela déterminons la valeur de I.

On a $I = 2^{\partial} - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = 2^{\partial} - \frac{1}{2}(A+B) = 2^{\partial} - \frac{E}{2}$

par suite E est le double du supplément de I; le centre de notre circonférence est donc sur l'arc AEB, mais il est évidemment sur la perpend. DE, élevée au milieu de AB; ce centre est donc en E. D'où etc - - - - -

Puis arriver la question
Lieu des points de rencontre
Il vous peut être bon, p
quel est le nœud de la que
dans la recherche de la so
de leurs points un bon
différents.
Chez votre ouvrage
Si toutefois vous prenez
à petit bout de lettre —
pas de moi.
Veuillez agréer les co
de votre dé

Ma

P. S. La 3ème partie
de paraître. Com
petit bouquin d'u
Sur les courbes en g

n analogue ?

— des médicaments ?

ous montre, aux élèves,
dition que il faut toucher
lution d'un problème,
exemple — sous dix énoncés

ul trop avancé vers
) quoique ce sent de
— je vous en prie, ne parlez

pleinement affirmer
ère tout disant

ère heure

de le Gouverneur vient
naire vous un ang bon
u nommé Ruchonnet,
inale ?

Mon cher Monsieur Catalan

Je viens mettre sous votre protection la jeune <u>exilée</u> dont ma mère vous a parlé dernièrement et vous prier, si la chose vous est possible, sans grand embarras, de recommander notre gentille protégée à l'un de ses juges.

Mlle Lucie Dupont, fille de Dupont de Bussac, petite nièce de Laffitte, travaille courageusement à Bruxelles pour se livrer à l'instruction et venir ainsi en aide à son père et à sa mère. Elle a 16 ans et elle subira —

Mardi prochain 15,
l'examen du premier
seront à ce qu'il paraît
Panton, Behier, M
Protestant, Didor gran
Mlle des Etangs.
Si vous trouvez un
parler de Mlle Lévie
ces examinateurs vous
bien reconnaissants. Je
vous solliciter dans
vous avez de si gran
à l'endroit de la M
Je sais que pour vous
plaisir et bonheur à
à de pauvres proscrits

, à l'hôtel de ville
degré. Les juges
et M^rs:
Montandon, Pastout
nd Rabbin et
rivoirez pour faire
Dupont et en de
en serons tous
suis confuse de
un moment où
des préoccupations
maison. Offrez mai
il y a toujours
rendre service surtout
. Nous sommes bien

tourmentés de la malheureuse affaire que Mr Guillot nous a contée. Si les choses s'arrangent au gré de vos désirs Marie serait bien aimable de nous en écrire un mot afin de nous rassurer. Ma chère Malade me pense qu'à cela ces jours-ci; elle est percluse de douleurs rhumatismales et passe des nuits exécrables. Mille affectueux compliments à ces Dames. Nous vous remercions de tout cœur.

Votre bien dévouée

Lucie Langier

Vendredi 11.

39.

Mon cher Collègue

je vous remercie bien de votre aimable invitation, et je regrette bien vivement d'être obligé de me trouver à Bruxelles lundi prochain, et d'être ainsi privé du plaisir de dîner avec vous.

mes hommages à Madame Calatan. Bien à vous

J. Rosenthal

Lundi.

mon cher Catalan, 40.

1° Votre annonce est à l'imprimerie et paraîtra en Mars, qui est en composition; Fermin est imprimé le même mois de Mars contient l'article Raabe qui vous concerne; je retiens en réserve l'article Sphère, pour paraître en avril. C'est un point intéressant et difficile étant déjà livré au public, il y a moins d'urgence.

2. voici une formule combinatoire difficile à débrouiller
notation $K_n = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1.2\cdots n}$; K_n est donc un coeff. binomial
On a

$$\frac{1.2.3\cdots n}{1.2.3\cdots p}\left[\left(\tfrac{1}{2}p\right)_n - p\cdot\left[\tfrac{1}{2}(p-1)\right]_n + \frac{p.p-1}{1.2}\left[\tfrac{1}{2}(p-2)\right]_n - \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}\left[\tfrac{1}{2}(p-3)\right]_n + \cdots\right]$$

$$=(-1)^{n-p}\frac{1.2.3\cdots n-1}{1.2.3\cdots p-1}\cdot\frac{[2n-p-1]_{n-1}}{2^{2n-p}}$$

On a besoin dans la formation indépendante des coeff. différentiels
j'en ai fait part à un habile calculateur qui ne l'a pas trouvé.

3° Si cela ne vous dérange pas, envoyez-moi les feuilles isolément
sont-elles toutes lithographiées?

16 fev. 1850

Votre tout affectionné
O Bonnet

Ma fille se présente à l'Hôtel-de-ville
pour son premier examen. elle
a de l'instruction et une bonne intelligence
féminine. recommandez-la à vos confrères.
la justice n'exclut pas la bienveillance.

Je démontre intuitivement le théorème de Steiner
sur la sphère, par cette considération qu'un plan tangent
~~se rencontre~~ est rencontré par trois diam. conj. en trois points formant
d'un triangle dont le point de rencontre des trois hauteurs est le
point de contact — par les quatre points passent une
infinité d'hyperboles équilatères ~~comme cela~~


PARIS
16
FÉVR.
60

En ville
Place de l'Estrapade 1
Monsieur Catalan, professeur

41.

Mon cher maître,

On lit cal. des Prob. (Laplace) p. 301 se On peut obtenir simplement et ou cette obtention simple est précisément l'affaire de Daniel B. — et pour 2 mens les results de Lagr sont les mêmes que ceux que j'ai consignés et son explication est la même que celle que je vous ai donnée — il s'agit de l'Espérance math.ty ce qui est fort diff. du n. des coups

Tout à vous

U. Le

connaissez-vous le beau théorème de Richelot. tout nombre premier de la forme 2^n+1 est ? a 3 pour racine primitive; encore un rapprochement entre le cercle et les nombres premiers

42

Mon cher maître,

Votre observation est fort juste. elle m'oblige de changer non le fond, mais la forme de la démonstration; ce qui me donne même un théorème plus général que celui de m.r Chasles.

Soit C une conique LMN et C' une courbe que le triangle ABL par A et B menons les tangentes AN, BM à la conique et du même côté; les points de contact sont M et N; et I est le point de rencontre des deux tangentes; portons IB en IK; de sorte que IB = IK; on a

$$AK = AI - BI = AN - NI - BM - MI = (AN - BM) - (NI + MI)$$

faisant la construction analogue à gauche de la courbe, on obtient

$$AK' = (AN' - BM') - (N'I' + M'I') \quad ; \text{ d'où}$$

$$\frac{AK}{AK'} = \frac{(AN - BM) - (NI + MI)}{(AN' - BM') - (N'I' + M'I')}$$

Supposons que B s'approche infiniment près de A et prenant aux limites différentielles, il vient

$$\frac{\cos BAK}{\cos BAK'} = \frac{d.AN - d.LM}{d.AN' - d.LM'}$$

Si la courbe ABL est telle que le premier membre de cette équation soit constant = m; on aura

$$m\, d.AN' - m.d.LM' = dAN - d.LM$$

d'où $m(AN' - LM') = AN - LM$; ou que la constante est nulle en L. quelles sont les courbes qui jouissent de cette propriété? j'en connais l'équation différentielle assez compliquée. elle pourra peut-être servir à l'interpret. géomet. des fonctions elliptiques. c'est l'objet d'un examen ultérieur; en tout cas lorsque m = 1 la courbe est une conique confocale et on a le théorème Chasles. Votre tout dévoué

U. Le

* de divers degrés (expression provisoire)

Monsieur Catalan professeur

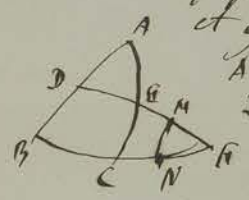
Paris

Monsieur

Monsieur Catalan
repétiteur à l'Ecole polytechnique
17. rue St. Dominique d'enfer

Paris

Mon cher maître, je vous remets avec remerciements le vol. 5 de Crelle; j'ai extrait le travail de Möbius sur les coordonnées dioptriques et vous le trouverez dans les N^os^ Annales de Décembre prochain — je vous serai très obligé de prendre pour moi à la bibl. de l'Ecole les volumes 7 et 8; vous pourrez les déposer chez le concierge de l'Ecole. ou mon fils les prendra — j'ai probablement encore à quelque chose à traduire, et vous en aurez votre part — j'ai traduit pour le journal Liouville, s'il en veut, un mémoire de Mr Richelot qui ramène à des travaux elliptiques de 1re espèce. la construction des polygones sphériques inscrits et circonscrits à un cercle sur la sphère — je démontrerai dans le mois de Décembre le théorème magnifique de Gauss sur les lignes géodésiques généralisé et géométrisé et démontré par Jacobi, je l'ai extrait du journal de Schumacher. c'est très beau. j'appelle ligne géodésique la ligne de plus court chemin sur une surface quelconque. que pensez-vous de cette dénomination? elle est courte et exprimée. voici un théorème de Mr Gudermann



ABC = triangle sphérique
D, E milieux de AB, et AC
H = intersection de DE et BC
HM = DE
HN = $\frac{1}{2}$ BC
le triangle MHN est rectangle en N
et MN est le demi-côté du triangle ABC
ainsi la théorie du triangle rectiligne linéaire
est fort joli. votre tout dévoué. J. Tannery

Catala

Maurice

en, professeur

Paris

Mon cher Catalan

Ayez la bonté de me renvoyer la thèse Vallon. je vous la rendrai après l'avoir consultée (dans le N° de Crelle qui vient de paraître, on trouve la série suivante

$$\cancel{\frac{2}{\pi} = \sum (4n+1) X_{2n}\,;\quad X_{2n} = -1 + X_{2n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}}$$

$$\cancel{\text{ou}\quad \frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\tfrac{1.3}{2.4}\right.}$$

$$\frac{2}{\pi} = \sum Q_{2n} X_{2n}\,;\quad Q_{2n} = 4n+1 \left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)^2$$

$$X_{2n} = (-1)^n \left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)$$

d'où $\frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 - 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \ldots$

et encore d'autres de ce genre et aussi la sommation de q.q. séries entre autres

$$1 + \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2.4.2n+3.2n+5} + \frac{a^6}{2.4.6\,.\,2n+3.2n+5.2n+7} + \text{etc}$$

et celle-ci en remplaçant a par a^{-1}

Fribourg a dû vous demander pour moi un Bulletin de Bruxelles.

Votre affectionné

Paris, 1859. Mars 5 — O Terquem

Dans mon manuel de Théor. géom. attribué à Hellemann il est glissé une erreur qu'un italien a remarqué. je la corrigerai en Mars prochain. j'ai mal traduit une dénomination allemande au plan osculateur, il faut substituer le plan passant par la tang. et la normale.

anormale mot qu'on emploie souvent n'est pas français. il faut anomale.

Comment pourrait-il exister une conique dont un tang. et une bissectrice se superposent ? la question cela tient à l'équation de quatre degrés

45

Mon cher Catalan,

Voici ce que je trouve dans Euler Introductio. t. 1. p. 264

1°. le nombre n peut être partagé en m parties inégales autant de fois qu'on peut produire par addition le nombre $n - \frac{m(m+1)}{2}$ au moyen des nombres $1, 2, 3 \ldots m$

2°. le nombre n peut être partagé en m parties, égales ou inégales, autant de fois qu'on peut produire par addition le nombre $n - m$ au moyen des nombres $1, 2, 3 \ldots m$

3°. le nombre n peut être partagé en m parties, égales ou inégales, autant de fois qu'on peut partager en m parties, égales ou inégales le nombre $n - \frac{m(m-1)}{2}$

4°. le nombre n peut être partagé en m parties égales ou non, autant de fois ~~que~~ qu'on peut partager en m parties inégales seulement le nombre $n + \frac{m(m-1)}{2}$

les 2 derniers th.
Des deux premie
pour les séries, une
est à désirer; si
il soit sous une
m^r de Polignac
autre inversion
dès que les au
la pierre. Je
fait connaît
ils donnerent
et même tout
toutes les fractio
à un milliè
determinan
j'appelle L
nommé m
le produit
est $\frac{L^{1/2}}{m^{3/2}}$
le produit
$\frac{L^{3/2}}{m^{1/3}}$ milli
Sur Ellip
On a cum
l'une
2^d so

Decembre 17

tout les conséquences
ces. lui donne une
démontrer d'abord
sur les données que
forme insérable
sur la somme de une
mant ses déterminants
ais ils seront généraux
sé déterminé à bien
sur les déterminants
toute l'analyse
de la géométrie
sur du second degré
de variables sont deux
ff un grand ; que
et un petit ; que je
Je prends 2 variables
ans principaux
prends 3 variables
ans principaux
ésentés sont l'ellipsoïde
ipse ou d'un hyperboloïde
ediatement l'aire de
le volume de l'autre
y ajoutant l'unité
Dernier Mem. D. Eng

les 2 derni
des deux
pour les séri
est à dém
ce soit s
M. le Pré
vendre l
à quel
la pré
faire co
ils doun
et même
toutes
à m
dette
j'aiff
nous
le pr
est
le pr
$\frac{4}{m}$
D
o
D

Décembre 17

EV

Magistro Estelan, professori

Mon cher Catalan,

fig. 1

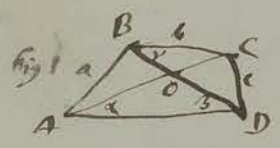
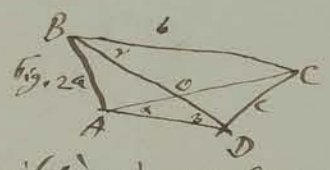


fig. 2



la figure 1 est un quadrilatère inscrit dans une ½ circonf. AD est le diamètre; la figure 2 est un quadrilatère inscrit dans une hyper. equilatère; AD est l'axe focal

les ~~trois~~ quatre équations suivantes existent dans les deux figures

$\tan\beta = \frac{AB}{BD}$ car $BAD = 1^{\text{q}} + \beta$ dans la fig. 2

$\tan\alpha = \frac{CD}{AC}$

$\frac{BO}{CO} = \frac{a}{c}$

$\frac{\sin BAC}{\sin BDC} = 1$

ne peut-on pas conclure delà que les deux questions mènent à la même equation? il est à remarquer que le lieu du point O est un cercle donné, et le même dans les deux questions; peut-être que cela vous ~~[illegible]~~ sauvera à tout la difficulté d'interpretation que vous avez signalée.

Salut et amitié

Olry

Sept. 20

comment résoudre le problème analogue dans la géométrie sphérique?

Maurice Catalan, professeur

47

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous prier d'assister à la Soirée qui aura lieu chez moi Vendredi prochain 11 du courant à 8 heures du soir

agréez mes salutations empressées

Cercueil

rue St Lazare au marais 28.

On Consera

Gand 5 août 4 heures

48

Mon cher Catalan

Contre nos accords a le fer du 9me Volume, après l'obligeance de m'envoyer les Epreuves le plus tôt possible !

Je tiens à votre Disposition Notre Volume sur l'Italie. Je vous le porterai, dès que j'aurai un numéro ! ou bien si vous passez

Paris Mardi

49

Cher Monsieur Catalan

En grande hâte un mot au sujet de votre lettre. L'intégrale $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy}{(1+x+y)^{a+b+c}}$ l'obtient immédiatement en employant l'expression

$$\frac{1}{(1+x+y)^{a+b+c}} = \frac{1}{\Gamma(a+b+c)}\int_0^\infty \xi^{a+b+c-1}\, e^{-\xi(1+x+y)}\, d\xi$$

Son évaluation une intégrale triple qui le calcule sans faire autre chose qu'intégrer d'abord par rapport à x.

Je me trouve bien embarrassé par votre énoncé $\alpha = q^8$, $\beta = q^{12}$, etc qu'est ce que c'est que ces polynômes ?

~~Et puis~~ l'identité $(q+q^9+\ldots)(q^4+q^{16}+\ldots) =$ etc est d'ailleurs extrêmement singulière et vous avez bien fait d'en complimenter l'Auteur.

pour la Aux 1'. Arch
l'obligeance de mettre un

Compliments affectueux
Madame Castelan !

Bien à vous

Carmen Ca

...ès ayz
...moment.

...li vu à Paris M. Cesparg, il m'a
...dit que grâce à l'appui de M. Bertram
...recteur des Ecoles de Berlin, il avait
...pu d'être rétabli dans une situation
...sociale, mais qui certainement n'est
...en rapport avec son grand mérite,
...ni que faire avec les passions
...étroites qui font rage en Allemagne?
...Mes remerciements d'avoir pris la peine
...de recommander à M. Machiel
...son envoi del Immunare. Les
...notes rétroactives grammaticales
...m'empêchent pas de lire avec le
...plus grand intérêt l'autre ch. ouvrage

Stas.

De M. Folie je savais déjà qu'il avait
lu avec partement une critique de
M. Clausius qui est on ne peut plus
fondée, mais je n'ai pas suivi avec attention
la question de la rotation d'onde; j'ai trop
d'autres choses sur les bras, je comptais me
lancer de demain.

Quelque jour où je serai moins pressé
vous recevrez une démonstration de
Stieltjes sur $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy =$
$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$. En attendant
croyez toujours à ma plus vive
estime.

Ch. Hermite

Paris Vendredi

Mon Monsieur Catalan, 50

Je viens de préparer une chienne de Lyon pour vous et de m'en défaire en vous ci-pendant, avec l'entière confiance de n'être point indiscret.

Merci de l'envoi de la Nouvelle Atas, j'ai voulu payer une dette au Bon Dieu en vous la laissant votre illustre confrère.

Votre démonstration de l'identité Bernoulli, est un bijou, admirablement claire et facile, vraiment peu méritant le tâtonnage de nos jours!

J'ai depuis longtemps partagé votre sentiment de regret, à l'égard des dernières publications d'Hermite de Lisieux; le secret de les nombreux théorèmes n'est pas tardé à être connu, le P. Pépin les a démontrés, il est beaucoup gagné à donner de l'esprit et l'air à les citoyens, les principes et les méthodes, les vérifications multiples et monotones, font un peu la moire.

C'est moi qui ai été bien touché
par ce nouveau de l'adresse
Société de Liège, j'ai si peu
ce que j'avais senti. C'est
Lauvier de Grandpré, pa
été échappé, l'auteur ne
mon nom qu'il écrit Alex
Me voici préoccupé peu
Ce quartette bien parce
purement et simplement
Simplon, qui alors a
dire exactement l'a
Celle que vous me comm
plus de valeur et j'y
bien l'étudier
J'apprends votre id
un instant votre att

... et peut-être on en peut
... dont vient Monsieur le
... du bien l'impression de
... dans le n° de 25
... page 377, que j'ai
... fait par seulement
... mitte.
... de cette formule pour
... le, elle revient
... t à celle de
... lieu d'être approché
... ire de la courbe.
... uniquement à l'infiniment
... erieur ou égal zéro
...

... ité, voulant appeler
... tion sur l'équation

que vous connaissez parfaitement :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy}{(1+x+y)^{a+b+c}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$$

Comment rendre l'intégrale symétrique en a, b, c, comme on le fait dans le cas analogue et plus simple de :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \ ?$$

Ce résultat se tire de la relation

$$\int_0^\infty F(z)\,dz = \int_0^1 F(z)\,dz + \int_1^\infty F(z)\,dz$$
$$= \int_0^1 \left[F(x) + \frac{1}{x^2}F\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx,$$

et j'ai cherché à avoir pareillement :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \Phi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Je trouve qu'il faut prendre :

$$\Phi(\xi,\eta) = F(\zeta,\xi) + F\left(\frac{\eta}{\xi},\frac{\zeta}{\xi}\right)\frac{1}{\xi^3} + F\left(\frac{\xi}{\zeta},\frac{\eta}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^3}$$

En effet par cette formule
transformée dans le Jour
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\xi^{a-1}\zeta^{b-1}+\xi^{b-1}}{(1+\xi\ldots}$$
symétrique en a, b, c, et p
Obtenue avec $\int_0^1 \frac{x^{\ldots}}{(1-\ldots}$
Une pièce en terminant
recommander à l'Académie
pris m'avoir connaître l'au
Mémoires et l'Annuaire
beaucoup.
Accepter mon cher Ami
bavardage, mon grand
tresses à mes sentiments
dévoués

ente l'intégrale la
ivante

$$\frac{\zeta^{c-1}+\xi^{c-1}\zeta^{a-1}}{(1+\zeta)^{a+b+c}}\,d\xi\,d\zeta,$$

ei rédige l'analogie

$$\frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx.$$

t, à vouloir bien me
de Bruxelles pour
mée dernière, les
aux quels je tiens

ieur Catalan m'a
nage, et m'en
sfaction et bien

Hermite

Cher Monsieur!

Malgré que votre aimable lettre, dont vous avez bien voulu m'honorer, m'a causé une vive joie, les scènes sanglantes, dont Paris était le triste théâtre, ont abattu mon moral à un tel degré qu'il m'a été absolument impossible de vous répondre. On ne pourrait pas entamer une conversation même la plus indifférente, sans toucher les événements du jour, et il possible de les passer sous silence, quand on parle à un patriote français, dont le coeur doit être rempli de douleur et de tristesse? Quel tableau navrant se présente-t-il aujourd'hui en France? Après les crimes et les lâchetés du second empire, nous voyons les crimes du désespoir, dont la commune avait souillé sa mémoire surpassés par les crimes de ceux qui égorgent sans pitié leurs frères au nom de la loi, qu'ils foulent aux pieds, au nom de l'humanité qu'ils méprisent et outragent avec un cynisme abominable, au nom de cette république, qu'ils veulent étouffer le plustôt possible; au

[illegible] de ma mère
de Sainte Opportune,
octroie de mes
biens mon usufruit
ginieux, qu'en
jouissent [illegible]
tant que je
demeurerai
célibataire et
tiendrai chez
moi ladite dame
que la nommée
Opportune [illegible]
de satisfaire
aux charges
et conditions
ci-dessus [illegible]
Fait à Saint-Denis
le dix-neuf janvier
mil huit cent
soixante-douze.

Jean Pierre
Bonnaud
Notaire
à Saint-Denis

rables prétendants
sincèrement
nons nous enfin?
itorienne des
savaient pas de
ie, contre l'avaho-
i ne savaient que
portes, et conclure
bonteuses avec
mille des soldats
dés, mal octroyés
? ou vous une nou-
avec une nouvelle
vable, dont l'assemblée
ble être un digne
ujours est-il, qu'un
table mécanicla
ame sera subjuguée,
porter des chaînes.
de quoi être abattu.
s affaires politiques
pas à votre esprit
es si sombres, veuillez
annoncer votre
iré. Vous pouvez
ainte pour ma
n'ouvre pas les
çois de l'étranger
ûreté vis à vis du
nement belge; si-
it avec votre pré-
veuillez bien croire
dame avec vous
plus agréables à votre
ère ami et dévoûtée

A Ettrup

Mon cher Monsieur Catelan,

Je ne suis pas surpris de ce que vous me dites; & j'avais deviné le ressentiment que son ne saurait pas lire mon écriture: aussi après avoir fini mon mémoire, j'en ai recommencé à la copie; mais en voyant que la copie ne valait pas mieux que l'original, j'ai renoncé à recopier une pièce inutile:

comme il est
les deux e
se saurons
non plus, je
le meilleur
prendre,
sron mon
Monsieur G
prière de
transmet
que j'en
copie lib
faite, si
les formulé
il n'est alors
à se fait
fait des écra
jeu si l'on

t probable que
autres consignes
nt pas me lire
à penser que
r parti à
c'est de renvoyer
nuscrit à
anatelet, avec
e que le faire
ître, afin
laisse faire une
ille: ce qui serait
f m'y avantage
y: à cet égard
olument pas
à un hospice qui
ersis extraordinary
expérience.

mais enfin j'aviserai
aux moyens dès sortir
y de vous présenter
quelque chose de
lisible.

votre très dévoué confrère
A. Fleichen

Mardi

53.

Mon cher Voisin

Avez-vous le temps de passer par la Revue Bailly. Il est Rue Bonaparte avec un mot. Il joint à pouvoir vous charger de la livraison qui puisse vous serait remise.

Je lui ai dit que vous pourriez vous trouver au Bureau de la Marine vers 10 h. et l'après midi.

Si vous

Ecole Impériale Polytechnique

Paris, le 17 Juin

54.

Mon cher Catalan, au moment où je recois ta lettre, on me dit que Gauthier Villars vient de faire prendre à l'Ecole les exemplaires que tu avais destinés, pour te les faire parvenir. Ils avaient été livrés seulement avant hier. S'il ne te les a pas expédiés plutôt, comme je le lui avais demandé, c'est qu'il ne pouvait livrer les trayons à part sans avoir au préalable fait le dépôt de tout le volume, dont l'impression vient seulement d'être terminée.

Je pends une part bien vive à l'affreux malheur qui t'a frappé. Perdre une fille de 28 ans doit être une des épreuves les plus terribles qui puissent atteindre l'homme. J'ai une grande fille de 19 ans et sa jeune tête gaîlle pressent en être enlevée me glace le cœur. Je suis heureux du moins d'apprendre que les conditions matérielles ne te trouvent pas non plus

n'ai pas le temps l'y aller
écrire dans ce moment
ma part prise. Je
que mon article
sera prêt pour vers le
janvier.

Lisez le mot ci-jo
à Bicalo

Entiè

Si on ne peut trouver les
Veuillez en m'en demand
plies qu'on m'en exp

Me Catalan vous bien
adresse ses vœux
demain.

3 ou 4

d'avancement t'était bien dû après tous les services que
tu as eu à rendre. Dans tous les cas, si tu en as été
placide de quelques individualités, tu t'en auras aussi que tu as toujours
eu les vives sympathies de tes camarades, qui en t'accordant
cent être une mauvaise lite par avance, n'ont jamais mis en
doute ton intelligence et ton cœur.

Bien vivre et bien dévoué camarade

Pressault

Monsieur Cauchy a pris
connaissance de votre note
sur la théorie des séries. . 55
il prétend que vous aurez
du côté les recherches sur
les sont. Voyez exercices
de mathématiques. fevrier
année 1827. p. 221
et l'analyse algébrique
p. 135 et suivantes.

Votre dévoué
E Duprez

A Monsieur
Mr. Catalan
de Mathéma

ur

n. professeur

tique

[à Messieurs les Professeurs de Mathématiques,
à Messieurs les Ingénieurs et Architectes,
en France et à l'étranger. =

(56)

= Dans les derniers mois de l'année 1881, plusieurs communications ont été adressées à MM. les Élèves de l'École Polytechnique de Paris, au sujet de la figure géométrique dite le Donoïde d'Hugo ou Hugodonoïde, la rivale de la Sphère. Les communications ne paraissent pas avoir eu de suites scientifiques.

Aujourd'hui l'auteur de la théorie Hugodonoïdale réalisant son programme de publicité à outrance, se tourne vers un autre groupe d'intéressés.

Au point de vue philosophique, comme au point de vue pratique, le Hugodonoïde anti-archimédien est indispensable en géométrie

Monsieur Catalan. Président.
Projet de Circulaire communiqué
aux mathématiciens du Congrès =

et même, à certains égards, doit fer
la Sphère et les Sphéroïdes.
Aucun mauvais vouloir ne pourra
masquer cette vérité morphologique
l'auteur réclame une persistance une
Soleil pour son Dorcoïde trop patient :
persévérance est indispensable pour la
propagation même d'une idée juste
le Hugodoncoïde, malgré tout, doit p
un jour ! – Per fas et nefas ! =

Léopold Hugo

uiner

it

; aussi

clare au

la

t :

réveoir

A

Monsieur Eugène Catalan

à Liège

57.

Monsieur

La Société Mathématique à Amsterdam sous la devise « Een onvermoeide arbeid komt alles te boven » a décidé à l'unanimité de ses membres à l'occasion de son centième anniversaire en Mai 1879 de Vous conférer l'honorariat en raison des services éminents que Vous avez bien voulu rendre à notre société.

Nous espérons que Vous voudrez accepter, de notre part, cette marque de respect et que nous pourrons Vous compter au nombre des membres honoraires de notre Société.

Agréez Monsieur l'assurance de la haute considération de Votre dévoué serviteur

N. D. Kapteyn.

2e secrétaire

Monsieur Catalan,

Je n'ai pu retrouver qu'une partie du brouillon ; mais en la lisant et en la relisant je n'arrive pas à me persuader que je suis obscur ou incompréhensible. Il est possible, cependant, que je semble tel à mes lecteurs, puisque je mets en oeuvre un certain nombre d'idées qui m'appartiennent, et auxquelles le lecteur ne saurait être initié sans avoir consulté et étudié préalablement mes mémoires. Si je voulais être plus clair, je devrais, pour chaque petit travail de quelques pages, répéter les définitions, les principes, les formules fondamentales contenues dans les travaux antécédents : c'est ce que j'ai fait jusqu'à présent ; mais je crois que le temps est venu de m'affranchir de cette servitude, et de m'avancer hardiment dans le champ de mes recherches, en faisant usage de ma propre terminologie. – Et cette terminologie doit nécessairement différer de celle que l'on emploie communément, vu que mes recherches arithmétiques ont aussi un cachet spécial, dû à ce que, au lieu d'étudier les propriétés de certains systèmes de nombres, j'étudie la fréquence avec laquelle une propriété donnée peut se présenter dans un système donné. Les systèmes dont je m'occupe sont constitués par des nombres pris au hasard. Lorsqu'il arrive qu'un tel système jouit d'une propriété, désignée à l'avance, cela constitue, pour moi, un évènement : – c'est ce que j'appelle un évènement arithmétique. J'ai adopté cette dénomination pour bien mettre en relief tout ce qu'il y a d'éventuel dans les propriétés soumises à mes calculs : – ce sont, en effet, des propriétés éventuelles celles que j'étudie, et je les étudie, non dans leur essence, mais dans leur fréquence. Je ne puis donc renoncer à l'expression d'évènements arithmétiques, et aux autres que vous censurez, (fréquence, etc...), sans nuire gravement à l'esprit même de mes recherches. Et je suis d'autant plus forcé de maintenir ma terminologie, que je l'ai déjà introduite dans beaucoup de travaux, et qu'un changement de mots et d'expressions pourrait finir par rendre réellement incompréhensibles mes recherches à ceux qui les suivent avec continuité. — Vous me demandez comment je prononce le symbole $\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$. La vérité est que je ne te

prononcée point. Je ne reconnais pas la nécessité de nommer tout ce qu'
écrit en Algèbre. Je suis même convaincu qu'un symbole algébrique est d'
plus puissant qu'il est moins énonçable, ce qui s'explique aisément en
dérant que les symboles de l'Algèbre ont été inventés précisément dans le
d'abréger le discours et de condenser dans un signe visible l'oeuvre de la p
Si le symbole $\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ devait absolument être nommé, au lieu de l
ner un nom spécial, ce qui compliquerait sans utilité la nomenclature ma
matique, je répéterais sa définition en disant : — « le nombre que ~~[illegible]~~
tiers, pris au hasard, engendrent au moyen d'une opération donnée » —
transformations connues sont celles que j'ai étudiées, tout au long, dans m
mier mémoire, et que je ne puis citer chaque fois sans ennuyer les lecteu
brouiller les calculs. De $\frac{n}{p}+\frac{1}{2}=q$, on tire $\frac{2n}{2q-1}=p$. Cela suffit, d'
transformations indiquées, pour pouvoir écrire

$$\sum_p \left[\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\right] = \sum_p \left[\frac{2n}{2p-1}\right].$$

Quant à la transformation asymptotique habituelle, c'est celle que Dir
emploie habituellement dans ses recherches asymptotiques : elle a donné lieu
considérations de MM. Hermite et Lipschitz, dans les Acta Mathematica
a un an ou deux. Dans le cas particulier considéré, elle consiste en ce
chacun des deux membres de la dernière égalité est asymptotiquement égal

$$\sum_{p=1}^{p=\sqrt{n}} \left[\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\right] + \sum_{p=1}^{p=\sqrt{n}} \left[\frac{2n}{2p-1}\right]$$

— Lorsque je prends, au hasard, deux entiers p et q, je ne fais pas at
au cas où p est divisible par q, parce que cet événement est infiniment p
bable. On démontre sans peine que, si deux entiers sont pris au hasard, la p
lité que l'un d'eux soit divisible par l'autre est la limite de

$$\frac{2\log n + 2(2C-1)}{n}, \quad (\text{pour } n \text{ infini}) :$$

elle est donc nulle. D'ailleurs, on peut convenir que, si $p=mq$, le quotient
faut, ~~[illegible]~~ de p par q, soit m, et que $m+1$ soit le quotient par excès ; — mais,
le répète, cela n'a pas d'influence sur le résultat que j'obtiens dans ma

Mes formules ne se prêtent pas à la résolution du problème dans le cas où p et q sont, comme vous le conseillez, des nombres premiers, autres que 1, parceque la fréquence de la série des nombres premiers, dans le système des nombres entiers, est infiniment petite. Mais je ne tarderai pas à étendre ces formules d'une manière remarquable : — j'ai déjà esquissé quelque petite chose sur ce sujet, et j'ai lieu d'espérer que je finirai par m'emparer du mystérieux et formidable système des nombres premiers. — Je pense que, si le reste de mon travail est inintelligible pour vous, cela dépend de ce que je n'ai pas su me faire comprendre dès le commencement. Aussi je vais m'attacher à démontrer, le plus clairement que je pourrai, la formule (1), et je supposerai $m=2$, afin de pouvoir développer les calculs. Il s'agit de chercher la probabilité que le nombre $\{x, y\}$ soit doué de la propriété Ω. Je pose

$$\sigma_1(n) = \Omega\{n,1\} + \Omega\{n,2\} + \Omega\{n,3\} + \cdots + \Omega\{n,n\}$$

$$\sigma_2(n) = \Omega\{1,n\} + \Omega\{2,n\} + \Omega\{3,n\} + \cdots + \Omega\{n,n\}$$

Il est évident que chacune de ces sommes est comprise entre 0 et n, de sorte que, si

$$\lim \frac{\sigma_1(n)}{n} = \mathcal{F}_1 \quad , \lim \frac{\sigma_2(n)}{n} = \mathcal{F}_2 ,$$

les nombres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont compris entre 0 et 1. Je veux démontrer que la probabilité cherchée est

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2}{2} ,$$

ce qui est, certes, très-remarquable. Si les nombres x et y sont pris au hasard parmi les n premiers nombres naturels, et que $\mathcal{P}_n$ soit la probabilité d'avoir $\Omega\{x,y\}=1$, on a

$$\begin{aligned} n^2\mathcal{P}_n = {} & \Omega\{1,1\} + \Omega\{1,2\} + \Omega\{1,3\} + \cdots + \Omega\{1,n\} + \\ & + \Omega\{2,1\} + \Omega\{2,2\} + \Omega\{2,3\} + \cdots + \Omega\{2,n\} + \\ & + \Omega\{3,1\} + \Omega\{3,2\} + \Omega\{3,3\} + \cdots + \Omega\{3,n\} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \Omega\{n,1\} + \Omega\{n,2\} + \Omega\{n,3\} + \cdots + \Omega\{n,n\} \end{aligned}$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} (n+1)^2\mathcal{P}_{n+1} - n^2\mathcal{P}_n = {} & \Omega\{1,n+1\} + \Omega\{2,n+1\} + \cdots + \Omega\{n+1,n+1\} + \\ & + \Omega\{n+1,1\} + \Omega\{n+1,2\} + \cdots + \Omega\{n+1,n+1\} \end{aligned}\right| = \sigma_1(n+1) + \sigma_2(n+1) - \Omega\{n+1,n+1\}$$

Changeons d'abord n en $n+1$, $n+2$, ..., $n+h-1$, et additionnons. Puis, remplaçons n par $n\nu$, et h par n. Il vient

$$(n\nu+n)^{2\sigma}\mathcal{P}_{n\nu+n} - (n\nu)^{2\sigma}\mathcal{P}_{n\nu} = \sigma_1(n\nu+1)+\sigma_1(n\nu+2)+\sigma_1(n\nu+3)+\cdots+\sigma_1(n\nu+n)+$$
$$+\sigma_2(n\nu+1)+\sigma_2(n\nu+2)+\sigma_2(n\nu+3)+\cdots+\sigma_2(n\nu+n)+$$
$$-\left\{\Omega\{n\nu+1, n\nu+1\}+\Omega\{n\nu+2, n\nu+2\}+\cdots+\Omega\{n\nu+n, n\nu\right.$$

La troisième partie du second membre, composée de n termes, égaux à l'unité, est évidemment comprise entre 0 et n; son rapport à n^2 tend donc vers zéro. Il en résulte, pour n indéfiniment croissant, et ν constant,

$$(2\nu+1)\mathcal{P} = \lim\frac{\sigma_1(n\nu+1)+\sigma_1(n\nu+2)+\cdots+\sigma_1(n\nu+n)}{n^2}+$$
$$+\lim\frac{\sigma_2(n\nu+1)+\sigma_2(n\nu+2)+\cdots+\sigma_2(n\nu+n)}{n^2}.$$

Parmi les n quantités positives

$$\sigma_1(n\nu+1)+\sigma_2(n\nu+1),\ \sigma_1(n\nu+2)+\sigma_2(n\nu+2),\ \ldots,\ \sigma_1(n\nu+n)+\sigma_2(n\nu+n),$$

soit, pour des valeurs données de n et ν,

$\sigma_1(n\nu+p)+\sigma_2(n\nu+p)$ la plus petite,

$\sigma_1(n\nu+q)+\sigma_2(n\nu+q)$ la plus grande,

et supposons

$$\lim\frac{p}{n}=\alpha,\quad \lim\frac{q}{n}=\beta,$$

α et β étant nécessairement des nombres, (constants ou fonctions de ν), compris entre

On a

$$\lim\frac{\sigma_1(n\nu+p)}{n}+\lim\frac{\sigma_2(n\nu+p)}{n} < (2\nu+1)\mathcal{P} < \lim\frac{\sigma_1(n\nu+q)}{n}+\lim\frac{\sigma_2(n\nu+q)}{n}.$$

Or

$$\lim\frac{\sigma_1(n\nu+p)}{n} = \lim\frac{\sigma_1(n\nu+p)}{n\nu+p}\cdot\lim\frac{n\nu+p}{n} = (\nu+\alpha)\mathcal{F}_1.$$

Donc

$$\frac{\nu+\alpha}{2\nu+1}(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2) < \mathcal{P} < \frac{\nu+\beta}{2\nu+1}(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2).$$

Enfin, si ν augmente sans limite, on voit que

çons

+n}}.

ou à

vers

x ; Se

0 et 1.

Hommage respectueux à Mr Catalan
Mai 1879.
Laquière

59.

École régionale de tir de Blida.

Extrait des compléments au cours théorique de tir

professé par M. E. Laquière, Capitaine d'Artillerie.

Théorie de la trajectoire dans le vide, avec démonstrations nouvelles de ses propriétés.

Lithographie de l'École

et de la nouvelle origine est un point intérieur fig. (1, 2, 3)

Observations.

1° — Notions comprises dans le cours.

— Mouvement d'un point matériel. (I & II) —
— Relations entre les trajectoires dans le vide dues à une vitesse initiale de gran
— Propriétés caractéristiques de la parabole. — Foyer. — (Propriétés 1, 2, 3,
— Trajectoires dans le vide issues d'une même origine avec une vitesse initiale d
de grandeur constante. —
— Problèmes balistiques. — Leur discussion. —
— Comparaison des portées en terrain horizontal et en terrain varié. —

2° — Notions géométriques complémentair

— Propriétés caractéristiques de la parabole. — (Propriétés, 5, 6, . .
— Théorème des Pôles et Polaires. —
— Détermination sur une parabole de la Normale égale à la corde
point où la normale coupe la courbe. —
— Variation de la Portée lorsque la ligne de mire est seule variable. —
— Construction de la portée à chute Normale. —

Théorie mécanique nouvelle de la Parabole, ou courbe balistique dans le vide.

La Parabole est la courbe que décrirait dans l'espace un point matériel lancé dans une direction arbitraire, s'il était à partir de l'origine de sa course soustrait à toute influence étrangère autre que l'action de la pesanteur, ou plus exactement d'une force constante en grandeur et dirigée invariablement suivant une parallèle à la verticale du point de départ. C'est la trajectoire fictive que décrirait un projectile dans le vide s'il était possible de faire disparaître les entraves que l'air oppose à son mouvement, et abstraction faite des insignifiantes divergences de parallélisme des verticales des positions successives occupées par le mobile.

La connaissance de cette trajectoire irréalisable offre le plus grand intérêt comme préparatoire à l'étude plus complexe de la trajectoire réelle, ou dans l'air, qui n'est qu'une modification de la précédente, résultat de la résistance offerte par l'air déplacé par le projectile au mouvement que lui donnent les influences préalables, vitesse initiale et pesanteur. Les propriétés de la trajectoire dans l'air ne sont en effet autres que celles de la trajectoire dans le vide, plus ou moins modifiées suivant le degré d'influence de la résistance de l'air sur le projectile considéré ; or, en raison même des relations précises et simples qui, pour le mouvement fictif dans le vide, relient les effets aux causes, les propriétés de la trajectoire dans le vide sont rigoureusement connues avec la plus élémentaire facilité ; leur recherche préalable est donc un grand pas de fait, et à peu de frais, dans l'étude préparatoire de la trajectoire réelle du projectile dans l'air.

Après cette justification sommaire d'une théorie que d'aucuns auraient pu considérer comme de pure spéculation et traiter d'amusette géométrique, nous allons étudier en en prenant l'exposé dès son début, le mouvement d'un projectile dans le vide.

I — Mouvement d'un point matériel lancé verticalement.

La vitesse d'un corps lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse

or si la nouvelle origine est un point inférieur fig. (47, 48, 49)

initiale (v_1) est à chaque instant la résultante de cette
de la vitesse uniformément accélérée ($-gt$) que lui comm
temps t l'action incessante de la pesanteur, dirigée en sens
originelle v_1 (ce qu'exprime le signe — dont est affectée cette
vitesse de bas en haut conservée par le mobile dans sa course v
temps t, c'est-à-dire t secondes après son départ :

$$v = v_1 - gt.$$

Cette vitesse est ascensionnelle tant que v_1 reste supérie
pour $t = \frac{v_1}{g}$, valeur qui représente par suite la durée de l'as
négative lorsque t dépasse cette valeur. Le corps étant ainsi
S de sa course, retombe à partir de cet instant sous l'action
communique une vitesse de chûte $-v = g\theta$, en posant
à-dire en comptant le temps θ à partir du passage du corps au
après l'origine du mouvement.

Le chemin z parcouru dans cette chûte uniformément ac
distance au point S du point M où se trouve le projectile au
compté à partir de l'origine du mouvement est ainsi de :

$$z = \frac{1}{2} g \theta^2;$$

Cette expression, restant la même pour deux valeurs de θ égal
montre que le mouvement de chûte s'opère symétriquement au
l'époque du passage au sommet divise en deux parties égales
entre les deux passages au point M de la verticale. De plus
possède le mobile au même point sont égales en valeur abso
dans les deux périodes.

Hauteur du jet.

La durée de la chûte étant égale à la durée $\frac{v_1}{g}$ de l'asc
à laquelle parvient le projectile, distance de S au point de départ

$$h = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_1}{g}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2g}$$

La hauteur du jet dont est capable une vitesse ascensionnelle
directe du carré de cette vitesse.

De même les distances des divers points de la verticale a

directe des carrés des vitesses restantes en ces points, ce qui du reste revient à dire qu'elles sont proportionnelles aux carrés des temps mis à passer de ces points au sommet, ou inversement.

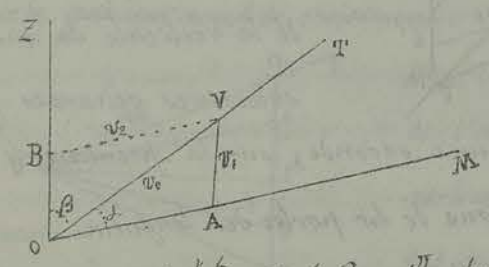
II — Mouvement d'un corps lancé obliquement à la verticale.

Le cas général de la courbe balistique dans le vide est la trajectoire d'un mobile lancé suivant une direction oblique à la verticale. Il se déduit très-simplement du mouvement d'un corps pesant lancé verticalement, par sa composition avec un mouvement uniforme de cheminement dans une direction fixe, celle de la ligne de mire.

La vitesse initiale v_0, inclinée à la verticale, suivant laquelle est lancé le projectile peut être considérée à cet effet comme la résultante de deux vitesses simultanées v_1 et v_2, ses composantes la première suivant la verticale, la seconde suivant une direction arbitraire qui sera celle de la ligne de mire. Si celle-ci est choisie horizontale, et que l'on désigne par α l'angle de projection, (vulgairement angle de tir) ces deux composantes seront : $v_1 = v_0 \sin\alpha$, et $v_2 = v_0 \cos\alpha$.

Le corps peut en conséquence être considéré comme soumis à deux impulsions simultanées exprimées par ces deux composantes. L'impulsion suivant la ligne de mire occasionne un cheminement uniforme de la verticale avec laquelle se trouve entraîné le projectile, et que, relativement à l'origine cheminant sur la ligne de mire, il décrit sous l'action combinée de la vitesse verticale d'impulsion v_1 et de la pesanteur, suivant les lois qui viennent d'être exposées dans le paragraphe précédent.

D'une manière générale, si la ligne de mire, ou corde sous tendant l'arc $\bar{o}\bar{z}\bar{t}$ de trajectoire considéré, est oblique sur l'horizon, en désignant par α et β les angles de la ligne de projection avec la ligne de mire et la verticale, on aura entre la vitesse v_0 et ses deux composantes les relations :



$$\frac{v_0}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta}$$

qui se simplifient en celles déjà données par la condition $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, lorsque la ligne de mire est horizontale.

si l'a nouvelle origine est un point intérieur p.g. (4, 1, 3, 5)

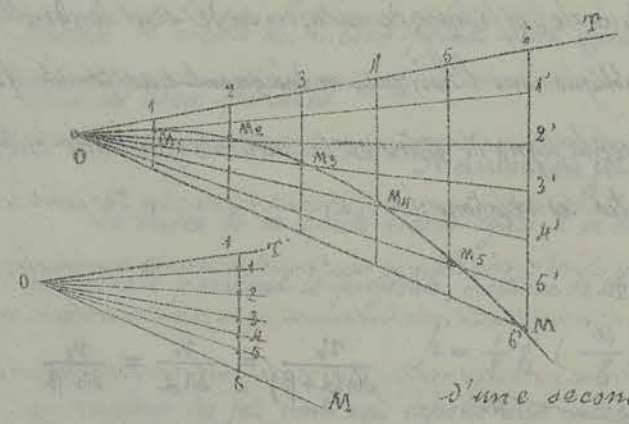
Observons une fois pour toutes que l'origine et le p
deux points quelconques de la courbe géometrique décrite par
de mire restant la corde qui les joint. On peut en effet considér
commençant à un instant quelconque et s'arrêtant au point qu
pour vitesses initiale et de chute les vitesses que possède, dans le m
indéfini, le projectile en ces deux points.

Cela posé, la position du projectile à une époque quelconq
simultanéité des deux mouvements définis ci-dessus, suivant la
et suivant la verticale (uniformément varié) nous permet de re
les propriétés suivantes de la trajectoire:

1° — Les chûtes du projectile, c'est-à-dire ses distance
de projection (portions de verticale comprises entre la ligne de p
sont proportionnelles aux carrés des temps de parcours, par suite d
parcourues dans son cheminement de direction quelconque, c'est
de la ligne de tir elle même soit de toute autre ligne de mire (

Toute tangente à la trajectoire pouvant être prise pour
corde, issue du point de contact pour ligne de mire, on voit que
ordonnées parallèles à une direction fixe (la verticale, si la para
orientée) comprise entre la courbe et une tangente fixe quel
directe des carrés des abscisses, ou distances comptées sur cette tang
contact et le pied de l'ordonnée.

2° Construction de la parabole par points. Sur la ligne de

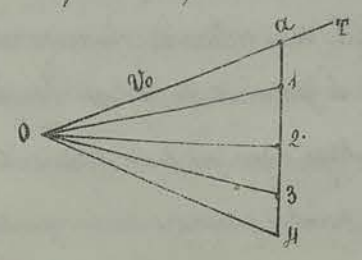


O une série
v_0 ; 01 ; 12
chacun des po
des verticales
de la verticale
successives se
d'une seconde; sur la pren
et à partir de son pied sur la ligne de tir porter des longue
23, ... etc. invariablement égales à $\frac{1}{2} g$; joindre sou

à l'origine O; le réseau ainsi formé s'obtiendrait indentiquement le même en portant sur l'une quelconque des verticales, celle d'ordre t des intervalles égaux à $\frac{1}{2}\frac{g}{v}t$. Il en résulte que l'intersection de la verticale d'ordre t avec le rayon divergent de l'origine du même ordre est à une distance verticale de t fois $\frac{1}{2}\frac{g}{v}t$, soit égale à $\frac{1}{2}\frac{g}{v}t^2$ de la ligne de projection; c'est-à-dire se trouve au-dessous de celle-ci d'une quantité précisément égale à la chûte du projectile pendant le temps t que la verticale a mis dans le mouvement de cheminement à se transporter dans cette position. Les points de la trajectoire sont donc les points où se croisent les droites d'ordre correspondant dans les deux réseaux. On peut donc considérer la courbe balistique dans le vide comme décrite par un mobile dont la verticale s'éloigne d'un mouvement uniforme tandis que la perspective du mobile sur une verticale fixe parcourt cette dernière d'un mouvement de chûte uniforme.

3º — La même construction pourrait être retournée en prenant le point de chûte comme origine et inversement, et changeant toutes les vitesses de signe. Le réseau des parallèles resterait le même, le second réseau des concourantes se croisant au point de chûte M détacherait des segments de longueur $\frac{1}{2}\frac{g}{v}t$ sur la verticale de l'origine. Faisant correspondre dans les deux faisceaux convergents les deux rayons qui se croisent sur la courbe, la corde (ou portée) correspondra réciproquement dans chacun de faisceaux à la tangente au point de concours dans l'autre, et l'on pourra considérer la parabole comme le lieu des points de concours des rayons joignant deux centres fixes aux points correspondants de deux divisions égales portées sur les verticales des deux centres.

Si l'on considère la verticale également distante des deux points, le point où elle traverse la courbe pourra être pris pour l'origine commune de deux divisions portées en sens inverse et telles que les rayons unissant les points à égale distance au dessus et au-dessous de cette origine aux deux points extrêmes centres des faisceaux décrivent la courbe par leur point de croisement.

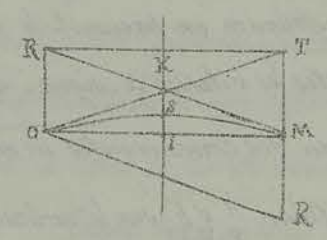


4º — Si ayant pris la longueur $Oa = V_0$ à partir de l'origine sur la ligne de tir, on porte sur la verticale du point a, et à partir de la ligne de tir, des segments successifs égaux à $\frac{g}{v}$, c'est-à-dire

et la nouvelle origine est un point intérieur fig. (1, 2, 3, 4, 5)

double de ceux qui ont servi à l'établissement des cordes su
ci-dessus unissant l'origine aux points où se trouve le proj
distantes d'une seconde les unes des autres, les longueurs totale
a et les divers points de division représenteront les vitesses de
au bout de ces époques successives, lesquelles se composant avec
de cheminement suivant la ligne de tir donnent pour express
de la vitesse acquise par le mobile à l'époque t, la $t^{ème}$ oblig
$t^{ème}$ point de division.

On voit ainsi que si l'on mène par un point les para
deux points de la courbe et qu'on les arrête à une même ver
seront proportionnels aux vitesses acquises aux points de con
du coté vertical sera parallèle à la corde des points de contact.



5° Si O et M sont les extre
et que la verticale à laquelle on
et OR aux vitesses initiale et de
la verticale du point M, la tange
au coté OR du triangle ROT; elle coupera le coté OT en son
sur la verticale passant par le milieu de la corde OM. Ainsi
extrémités d'un arc se croisent sur la verticale à égale
points de contact.

6° — Les composantes suivant la ligne de mire
la verticale des vitesses aux deux extrémités de l'arc sont p
OM, MT et MR, c'est-à-dire égales suivant la corde
inverse, suivant la verticale. Si la ligne de mire est
l'angle de chûte est égal à l'angle de projection.

7° — Si l'on considère le point S, situé à mi-dist
la chûte KS sera le quart de la chûte TM correspondant à
double; elle sera donc la moitié de la portion KI de verticale c
de tir et la corde, elle même moitié de TM. Le point S de la
verticale de concours de deux tangentes partage donc en deux
portion de verticale comprise entre la corde et le point de concours

Le point S ainsi défini est le sommet de l'arc limité OM, c'est-à-dire le point de l'arc le plus éloigné de sa corde parallèlement à la verticale ; la tangente au point S est en effet parallèle à la corde OM, puisque, l'époque du passage correspondant à la moitié du cheminement total la composante verticale à adjoindre à la vitesse initiale OT (en valeur proportionnelle) pour obtenir comme résultante la vitesse au point S sera la moitié de TR, soit égale à TM (toujours proportionnellement). La direction de la tangente en S est donc parallèle à OM.

La flèche ou ordonnée SI du sommet est égale au quart de la chute à l'extrémité M de l'arc.

8° — Si l'on mène une série de cordes parallèles, les tangentes aux deux extrémités de chacune d'elles se couperont réciproquement sur une verticale fixe, traversant elle-même la courbe au point dont la tangente est parallèle à la direction fixe des cordes. De plus cette verticale sera le lieu des milieux de toutes les cordes parallèles, et constituera ce que l'on nomme en géométrie le diamètre conjugué à la direction des cordes.

Toute verticale est le diamètre des cordes parallèles à la tangente au point où elle rencontre la parabole ; ce point, ou sommet particulier au diamètre considéré, partage en segments égaux la portion du diamètre comprise entre une tangente et la corde de direction conjuguée menée par le point de contact.

9° — Si l'on considère la ligne de mire horizontale le diamètre conjugué sera perpendiculaire aux cordes qu'il partage en deux segments égaux. On le nommera axe de la parabole parce qu'il est pour elle un axe de symétrie, ainsi qu'un repliement de la figure autour de cet axe le montrerait, et le sommet correspondant porte le nom de sommet principal de la parabole, ou simplement sommet lorsqu'il n'est pas fait mention contraire.

On remarquera que la vitesse au sommet principal est minimum. Dans le diagramme où toutes les verticales seraient représentées par des droites divergentes parallèles aux tangentes et limitées à une même verticale, c'est en effet la plus courte puisque elle est la perpendiculaire au milieu de toutes les obliques.

10° — Les ordonnées verticales comprises entre la courbe et une ligne de mire menées à égale distance des deux extrémités de l'arc, ou ce qui revient

au même à égale distance du sommet, sont égales.

Cette conséquence immédiate des propriétés ci-dessus s'ap
en considérant que les époques du passage mobile à deux hau
de la ligne de mire, ou au-dessous du sommet de l'arc limité, s
égales par le passage au sommet et par suite que leurs ve
distantes de la flèche.

Relations entre les trajectoires do obtenues avec une vitesse initiale de mais de direction variable. — Défin de la Parabole.

Les trajectoires correspondantes à une vitesse de grand
variable en direction offrent au point de vue balistique un inté
effet celles que l'on peut obtenir en faisant varier le seul élément
disposer, la direction, alors que la grandeur de la vitesse est le plus
préalable de la cartouche. La solution de tous les problèmes qui s'y
singulièrement facilitée par la remarque suivante:

Théorème.

Si l'on considère une parabole, trajectoire dans le vi
obliquement et soumis à l'action unique de la pesanteu
ses points on suppose lancé une série de mobiles dans
et de bas en haut, avec une vitesse précisément égale
en ce point le projectile sur sa trajectoire; le lieu géom
de la course ascensionnelle de ces mobiles sera une
laquelle on donne le nom de **Directrice de la pa**

Remarquons qu'en un point quelconque de la par
restante du projectile suivant la tangente à la courbe a poo
rectangulaires, une vitesse horizontale constante qui n'es
cheminement du projectile, et une vitesse verticale variable
égale à la différence de niveau entre le sommet et le po
c'est en vertu de cette vitesse que le projectile s'élève à l
principal.

Cela posé soient v v_1 v_2 trois vitesses quelconques et h h_1 h_2 les hauteurs dont elles sont capables, c'est-à-dire auxquelles serait porté le projectile lancé verticalement avec les vitesses respectives de même indice. On aura la suite de rapports égaux :

$$\frac{1}{2g} = \frac{h}{v^2} = \frac{h_1}{v_1^2} = \frac{h_2}{v_2^2} = \frac{h_1 + h_2}{v_1^2 + v_2^2} \; ;$$

Par suite si les vitesses v_1 et v_2 sont les composantes verticale et horizontale de la vitesse v, ce qui implique l'égalité :

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

on aura également :

$$h = h_1 + h_2$$

c'est-à-dire que la hauteur dont est capable, prise verticalement, une vitesse quelconque est égale à la somme des hauteurs dont sont individuellement capables ses deux composantes horizontale et verticale

Si v représente la vitesse en un point quelconque O de la trajectoire, le point H auquel parviendrait le mobile qui s'en détacherait avec une vitesse verticale v serait à une différence de niveau au-dessus du point O égale à la somme des hauteurs dont sont capables la vitesse composante verticale et la vitesse de translation horizontale. La première hauteur est la différence de niveau entre le sommet principal de la parabole et le point considéré O ; la seconde est la hauteur à laquelle parviendrait le mobile lancé verticalement du sommet avec la vitesse restante du projectile en ce point, qui n'est autre que la vitesse de translation.

Tous les sommets d'ascension H obtenus en faisant varier le point O sur la courbe sont donc à la même hauteur : $h_2 = \frac{v_2^2}{2g}$ au-dessus du sommet principal (v_2 représentant la vitesse de translation horizontale) c'est à dire que le lieu de ces points est une horizontale. On lui donne le nom de directrice.

La construction du sommet de la parabole en fonction des vitesses composantes de la vitesse réelle en un point quelconque O de la courbe, considéré provisoirement comme origine du mouvement, va nous faire connaître les propriétés remarquables de la parabole par les relations de ses divers points avec la directrice.

Détermination de la durée du trajet, du sommet de la trajectoire ou de la flèche, de la portée ou du point de chûte.

si la nouvelle origine est un point intérieur fig. (3 4 5 6 7)

Cherchons les éléments de la trajectoire d'un mobile lancé d
v, dont les composantes suivant la verticale et la ligne de mire
seraient représentées par v_1 et v_2.

1° Durée du trajet — La durée de l'ascension, temps néc
pour détruire la vitesse verticale v_1 au moyen d'une accélération c
à $\frac{v_1}{g}$. La durée du trajet, de longueur double, est donc $T = \frac{2 v_1}{g}$.

2° Portée — La portée, chemin parcouru avec une vitesse
v_2 pendant le temps T est égale à : $P = \frac{2 v_1 v_2}{g}$.

3° Flèche — La flèche, hauteur dont tombe le projectile pendan
trajet $\frac{v_1}{g}$ est égale à : $F = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_1}{g}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2 g}$.

Elle se trouve à une distance de l'origine égale à la moitié de
sommet à la fois à mi-distance des deux extrémités de la trajectoire
à mi-distance entre la ligne de tir et la ligne de mire dans le

4° Tension — Rapport de la portée à la flèche

$$\mathcal{T} = \frac{P}{F} = 4 \frac{v_2}{v_1}$$

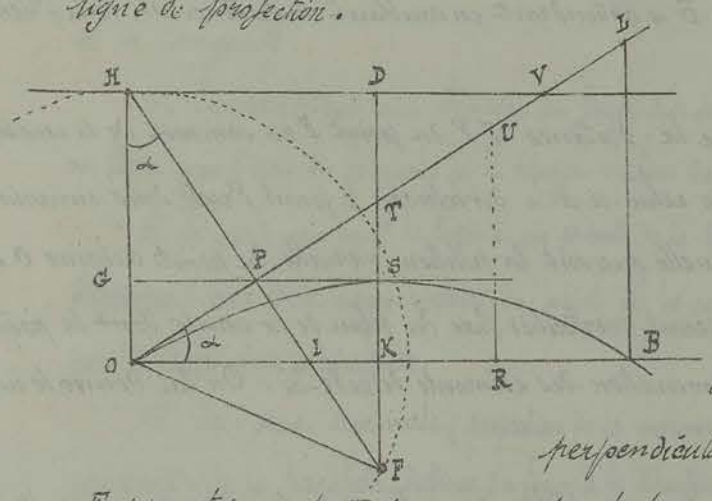
Elle est égale au quadruple du rapport entre la vitesse de transla
et ne dépend par suite que des positions respectives des lignes de m
Si la portée est horizontale la tension est le quadruple de l'inclina
verticale.

Ces expressions, faciles à déterminer dans le cas général,
construction des plus instructives si l'on prend la ligne de mire
va le développer dans le paragraphe suivant.

Propriétés caractéristiques de la Parabole. — Foy

Construisons le sommet principal de la courbe, c'est à
correspondant à une ligne de mire horizontale. La vitesse
d'ailleurs, de la courbe pris pour origine du mouvement sera
à la fois commode et élégante dans tous les problèmes qui en
hauteur $h = \frac{v^2}{2g}$ à laquelle s'élèverait le projectile lancé
vitesse verticale égale à v. Nous avons déjà vu que cette haut
point de la courbe à la directrice, droite fixe horizontale, c'est-à-
l'axe de la courbe et à tous ses diamètres, intimement liée a

Les circonstances du mouvement seront ainsi complètement définies au moyen de la distance $h = OH$ du point origine O à la directrice HD, et la direction OT de la ligne de projection.



Cela posé, abaissons du point H une perpendiculaire HP sur la ligne de tir et prolongeons là d'une longueur $PF = HP$ égale à elle même. Menons l'horizontale GPS du pied P de cette perpendiculaire, et la verticale $FKSTD$ du point F symétrique de H par rapport à la ligne de tir. Ces deux droites seront l'horizontale et la verticale du sommet; c'est-à-dire que le sommet principal de la courbe sera leur point S de croisement, que GPS sera la tangente au sommet et FD l'axe de la parabole.

On a en effet dans le triangle rectangle HPO, entre le coté OP de l'angle droit, sa projection OG sur l'hypoténuse OH, et cette dernière, la relation connue :

$$\overline{OP}^2 = OG \,.\, OH$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{OG}{OH} = \left(\frac{OP}{OH}\right)^2 = \sin^2\alpha = \left(\frac{v_1}{v}\right)^2$$

c'est-à-dire que les hauteurs OG et OH sont entre elles comme les carrés des cotés OP et OH, soit RU et OU, ou comme le carré de la composante verticale de la vitesse initiale est au carré de cette vitesse initiale elle même. Ces deux hauteurs sont donc dans le rapport de celles dont sont capables d'une part la vitesse verticale, d'autre part la vitesse initiale totale. La hauteur OH n'étant autre que cette dernière, la hauteur OG sera celle à laquelle parvient le projectile en vertu de sa vitesse ascensionnelle, c'est-à-dire la hauteur du sommet au-dessus du point O.

Le sommet se trouve donc sur l'horizontale GP, menée par le point P.

Or, le sommet se trouve à équidistance verticale de la ligne de tir OT et de la portée OKB. La verticale, ou axe de la parabole, croise donc la ligne de tir à une hauteur KT au-dessus du point O double de OG, et par conséquent se trouve deux fois aussi éloigné de la verticale origine OH que la verticale du point P.

o. la nouvelle origine est un point intérieur fig. (7 11 12 13 3)

Elle n'est donc autre que la rectiaire du point F symétrique à la ligne de tir.

Le point de chûte B s obtiendrait en doublant la distan axe à l'origine.

Remarquons que la distance S' F du point F au som égale à la distance DS' de celui-ci à la directrice; le point F'ren une parabole donnée quelle que soit la position variable du p courbe. C'est donc un point particulier fixe du plan de la cou est définie par la détermination des éléments de celle-ci. On Foyer de la Parabole.

Si l'on observe les diverses égalités d'angles et de longue la construction du foyer et du sommet en fonction d'un point qu et de la tangente en ce point (origine et vitesse initiale) on a propriétés les plus remarquables des points de la parabole, da

1° La Parabole est le lieu des points O, à égale distance directrice et d'un point fixe nommé foyer : OF = OH.

2° La tangente à la Parabole est bissectrice de l'angle formé par la parallèle à l'axe et le rayon qui va de ce point au foyer, nom du dit point.

$$\widehat{HOP} = \widehat{POF}$$

3° La tangente au sommet de la parabole est le lieu des projec tangentes menées aux divers points de la courbe.

4° Le sommet de la Parabole est le milieu de la portion de l'axe comprise e l'axe et la corde ou ordonnée du point de contact, perpendiculaire à l'axe : TA

Cette propriété s'énonce encore de la manière suivante : a sur l'axe de la portion de tangente comprise entre l'axe et la courb est double de l'abscisse du point de contact, distance de ce point a sommet.

Sous cette forme la propriété subsiste en remplaçant l'axe p quelconque, le sommet principal par le sommet de ce dia perpendiculaire à l'axe par la corde conjuguée du diamètre, c

l'abscisse est la distance du point à la tangente au sommet particulier, mais est prise parallèlement au diamètre, et non perpendiculairement à la tangente.

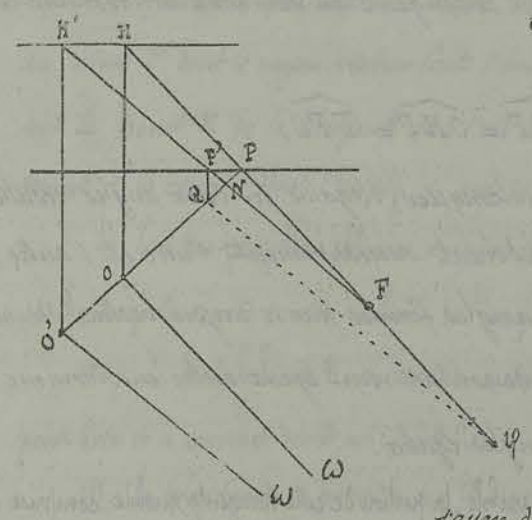
5° La perpendiculaire abaissée du foyer sur une tangente est bissectrice de l'angle formé au foyer par l'axe de la courbe et le rayon vecteur du point de contact : $\widehat{SFP} = \widehat{PFO}$.

6° La droite qui joint le foyer à un point de la directrice est bissectrice de l'angle formé au foyer par l'axe et le rayon vecteur du point où la courbe traverse la parallèle à l'axe mené par le dit point de la directrice.

7° La sous-normale (projection de la normale sur l'axe) est constante et égale au paramètre de la parabole, distance du foyer à la directrice.

Si du point O on menait la normale, perpendiculaire à la tangente ou parallèle à HP, elle rencontrerait l'axe à une distance du point K, projection du point O sur l'axe, évidemment égale à la longueur DF, distance du point D projection de H où la droite HP rencontre le même axe; ce qui démontre le théorème.

8° Le rayon de courbure de la parabole au point O est double de la longueur HI détachée sur le rayon vecteur du point H de la directrice à même distance de l'axe que le point de contact par la directrice d'une part, la corde de contact perpendiculaire à l'axe d'autre part.



Soit O un point de la courbe, H sa projection sur la directrice, la normale O ω au point O sera parallèle au rayon vecteur HF joignant le point H au foyer. Si O' représente le point infiniment voisin de la courbe, situé sur la tangente, la normale O'ω en ce point sera parallèle au rayon vecteur H'F de sa projection H' sur la directrice. Cherchons le rayon de courbure de la courbe suivant l'arc OO', c'est-à-dire la distance du point O de contact au point d'intersection ω des deux normales infiniment voisines.

La longueur PP' de la tangente au sommet interceptée entre les rayons FH et FH' est moitié de HH'; la longueur PQ de la tangente PO dont elle est la projection est donc aussi moitié de la longueur OO' de la tangente qui se projette en HH'.

Si la normale engine est un point intérieur fig. (14, 15, 16)

Si par le point Q nous menons une parallèle à P'F ou à O
la droite PF parallèle à O ω à une distance P φ moitié du
Or, dans le triangle infinitésimal PP'Q, semblable au triang
point N est l'homologue du point P, comme projection du
(voir la figure générale précédente dont la figure actuelle représen
certains détails.) On a donc l'égalité de rapport :

$$\frac{P\varphi}{PF} = \frac{PQ}{PN} = \frac{HI}{HP} = \frac{HI}{PF};$$

et par conséquent :

$$p = 2P\varphi = 2.\,HI$$

9°. La Parabole est l'enveloppe du second coté d'un angle droit dont
point fixe, tandis que le sommet de l'angle droit décrit une droite fixe.

On donne le nom d'enveloppe d'une ligne mobile ou variable
ligne reste constamment tangente dans ses variations.

10°. La Parabole est la courbe méridienne du miroir réfléchissant
parallèles tous les rayons lumineux ou calorifiques incidents issus d'un point

11°. Le point d'intersection de deux tangentes à la parabole est sur la
deux points de contact.

Si l'une des deux tangentes est la tangente au sommet
sur la figure générale :

$$\widehat{SFP} = \widehat{OHP} = \widehat{PFO}.$$

Si les deux tangentes sont quelconques, l'égalité des deux
des angles analogues formés en considérant successivement l'
avec la tangente au sommet. Les angles formés par le rayon
d'intersection avec ceux des points de contact sont égaux entre
fois somme ou différence de deux angles égaux.

12°. Lorsqu'une droite roule sur la parabole, la portion de cette tangente
tangentes fixes est vue du foyer sous un angle mobile de grandeur constante
rayons vecteurs aboutissants aux points de contact des tangentes fixes.

Conséquence évidente du précédent.

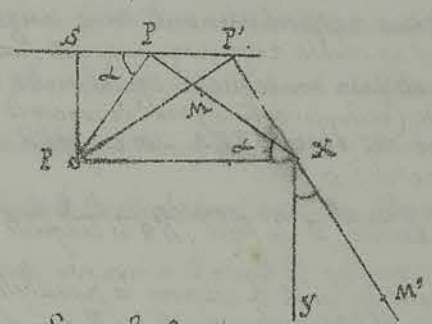
13°. Le foyer étant symétrique du point H par rapport
O qui coupe la directrice en V, l'angle OFV symétrique de OH

La perpendiculaire menée par le foyer au rayon vecteur coupe la directrice au même point que la tangente à l'extrémité du rayon vecteur.

14° Si l'on considère les deux rayons vecteurs de directions contraires sur la même corde passant au foyer, on voit que :

Les tangentes aux deux extrémités d'une corde mobile roulant sur le foyer de la parabole s'entrecoupent au point de la directrice situé sur la perpendiculaire menée à la corde mobile par le foyer.

15° Si l'on considère les deux tangentes à la parabole menée d'un point extérieur X, et les points P et P' où elles coupent la tangente au sommet ; les quatre points X, P, P', F sont sur une même circonférence ; et par conséquent l'angle FXP est égal à l'angle FP'P, ou à l'angle M'XY formé par des cotés perpendiculaires aux cotés de celui-ci. Par suite :



Les angles formés au point de croisement de deux tangentes à la parabole, d'une part entre la première tangente et le rayon vecteur du point de croisement, d'autre part entre la seconde tangente et la parallèle à l'axe, sont égaux entre eux.

16° D'après la figure : $\widehat{FXP'} = \widehat{F'FS}$, si l'on considère une tangente fixe PX à la parabole faisant avec l'axe l'angle α, elle coupera la tangente au sommet au point P dont le rayon vecteur fait l'angle α avec la tangente au sommet ; et, quel que soit le point X de la tangente que l'on considère ; la seconde tangente XP' menée par ce point à la courbe fera l'angle α avec le rayon vecteur F'X ; ainsi :

Le lieu des projections obliques sous un angle α constant du foyer sur les tangentes à la parabole est la tangente à cette courbe inclinée de l'angle α sur l'axe, ou bien :

17° La parabole est l'enveloppe du second coté d'un angle quelconque dont un coté passe par un point fixe et le sommet décrit une droite fixe.

18° La projection de la normale sur le rayon vecteur a une longueur constante, égale à la distance comprise entre le foyer et la directrice.

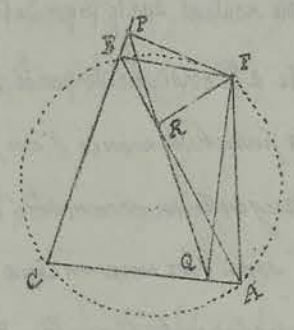
(Figure principale) La normale est en effet égale et parallèle à HF ; sa projection sur l'axe est donc égale à DF, et sa projection sur le rayon vecteur de même valeur, puisque son inclinaison sur les deux droites est la même.

19° Le foyer se projette sur la normale en son milieu.

a l'a nouvelle origine est un point intérieur fig. (7, 11, 14, 3)

20° Le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle est l
circonscrit au triangle; l'enveloppe de la directrice est le point de

Il suffit de remarquer que le cercle circonscrit à un
points de son plan dont les projections sur les trois cotés



soit F un point du plan du tri
PQR sur les trois cotés; les poi
circonférence décrite sur BF, et
circonférence décrite sur AF.
sont égaux respectivement
ARQ, et par conséquent égal
PRQ sont en ligne droite. Dans ce cas l'angle BFA sera
supplémentaire de l'angle C du triangle, et par conséque
le cercle circonscrit.

Si une parabole est inscrite dans le triangle, son foye
du cercle circonscrit puisque la tangente au sommet soit co
sur les trois cotés.

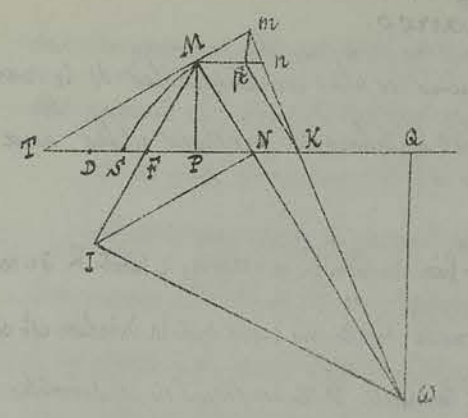
Le point de concours des trois hauteurs est l'intersection
du cercle circonscrit réciproquement par rapport aux trois cot
la droite PRQ à double distance du point F; par conséquent su

Pour compléter la théorie d'une courbe universellement étudiée no
un peu en dehors des observations ci-dessus, de l'une des propriétés les
courbure, donnant la plus simple des constructions du rayon de courbure

21° Construction du centre de courbure.

La construction du centre de courbure ω, intersection de
M de la parabole par la tangente infiniment voisine, de
valeur constante de la sous-normale PN, distance de l'axe
entre la projection du point M et le pied N de la n
distance p du foyer à la directrice, et de la propriété co
PT d'être double de la distance SP du sommet au
sur l'axe.

Soient MT et MN la tangente et la normale, et TP



le sommet S sera le milieu de la sous-tangente TP; le foyer F et le pied D de la directrice s'obtiendront en prenant SF et $SD = \frac{PN}{2}$, moités de la sous-normale. Soit m le point voisin pris sur la tangente. Menons l'ordonnée mp du point m, la parallèle Mpn à l'axe par le point M. La normale en n sera la droite nK qui coupe l'axe à une distance nK du pied de la normale en M égale à la distance Mp des points M et m dans le sens parallèle à l'axe; elle coupera la parallèle Mp à l'axe en un point n tel que le triangle infinitésimal $Mmnp$ sera semblable au triangle $TMNP$ avec sa hauteur sur l'hypothénuse.

Soit ω le centre de courbure, intersection des deux normales, et Q sa projection sur l'axe, on aura la suite de rapports égaux:

$$\frac{NQ}{PN} = \frac{N\omega}{MN} = \frac{NK}{pn} = \frac{Mp}{pn} = \frac{TP}{PN} \; ;$$

d'où:

$$NQ = TP = 2SP.$$

La projection NQ de la sous-tangente à la développée de la parabole sur l'axe (c'est-à-dire de la partie du rayon de courbure comprise entre l'axe et le centre de courbure) est donc double de l'abscisse SP du point où la droite est normale à la courbe. Ce qui donne une construction immédiate du centre de courbure ω.

2°) Une autre construction connue se voit aussi immédiatement. Élevons par le pied N de la normale une perpendiculaire à cette droite jusqu'à sa rencontre I avec le rayon vecteur MF du point N, puis du point I élevons une perpendiculaire $I\omega$ au rayon vecteur, le point ω où elle coupera la normale sera précisément le centre de courbure. En effet:

$$\widehat{mnM} = 90^\circ - \widehat{mMp} = 90^\circ - \widehat{FMT} = \widehat{IMN}$$

et par suite les triangles rectangles $MI\omega$ et Mmn sont semblables, d'où:

$$\frac{N\omega}{MN} = \frac{Mp}{pn} \; ;$$

Le point ω déterminé par cette construction est donc le même que celui qui a été obtenu par l'intersection de deux normales voisines, c'est-à-dire le centre de courbure. C.q.f.d.

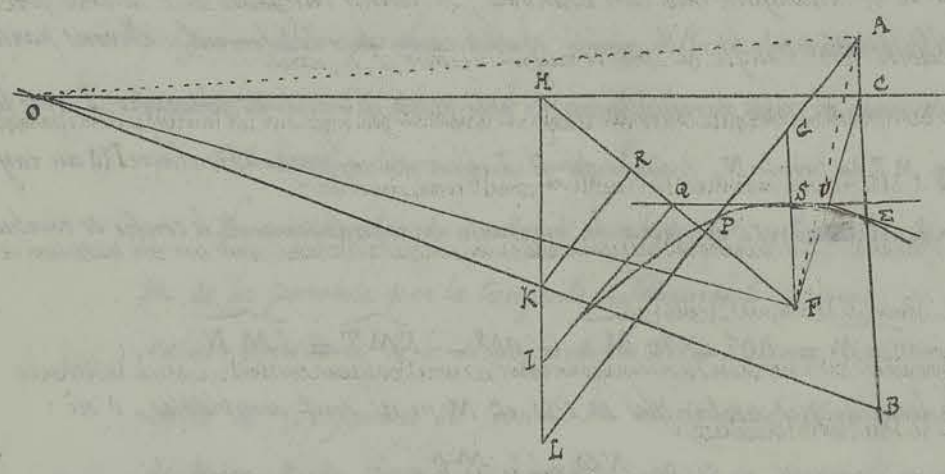
Théorème des Poles et Polaires.

Nous terminerons l'aperçu des propriétés les plus remarqua
l'une des plus intéressantes, bien qu'elle soit en dehors des question
bolliques.

Lorsqu'une corde A L roule autour d'un point fixe du plan de la parabole,
tangentes menées par ses points d'intersection avec la courbe, décrit une droite dont
diamètre du point fixe (c'est-à-dire parallèle à la tangente V Σ au point
la parabole).

Réciproquement. « Si un point K se meut sur une droite fi
contact des tangentes menées par ce point à la courbe passe par un
diamètre conjugué de la direction de la corde (évidemment le point d
aux deux points où la corde traverse la parabole). »

Soit A un point fixe du plan de la parabole, F le foyer, S Q l
et H C la directrice de la courbe. Le diamètre du point A coupera l
où il traverse la perpendiculaire V Σ au rayon vecteur F C de
avec la directrice, et la tangente y est précédement la droite
droite quelconque issue du point A ; si l'on abaisse la perpendic
cette droite, le point H de rencontre de F P et de la directrice sera
de la corde A L, et le point L (milieu de la corde) se trouvera par suite à l'inte
de la parallèle H L à l'axe menée par le point H (voir le 2e



de concours des tangentes aux extrémités de la corde conjuguée
K, tel que I soit le milieu de la longueur L K prise sur ce
en résulte que, si l'on abaisse du point K la perpendiculaire K

les longueurs PQ et QR détachées sur cette droite par ses perpendiculaires menées des points L, I et K seront égales.

Cela posé cherchons le lieu des points K.

Observons que, le point Q étant à la fois le milieu de FH et de PR, les deux longueurs FP et RH sont égales, et que par conséquent, si G est le point d'intersection de la corde AL avec l'axe FS, il en est de même des longueurs FG et HK. Or, si l'on mène FO perpendiculaire à FA jusqu'à sa rencontre O avec la directrice, les triangles FAG et OFH seront semblables comme ayant leurs cotés perpendiculaires, et l'on aura:

$$\frac{FA}{OF} = \frac{FG}{OH} = \frac{HK}{OH}$$

Il en résulte que l'angle HOK est égal à l'angle AOF; le lieu du point K est donc une droite fixe issue du point O et faisant avec OH l'angle que OF fait avec OA. Or, la circonférence décrite sur l'hypothénuse commune OA passant à la fois par les sommets des deux angles droits F et C, les angles CFA et COA sont égaux, et par suite la droite OK est perpendiculaire sur FC comme la droite OF l'est sur FA. La droite fixe OKB lieu des points K est donc parallèle à la tangente V Σ au point Σ où le diamètre AC coupe la courbe. D'ailleurs les points de contact des tangentes menées du point A à la courbe appartiennent au lieu cherché, puisqu'ils réunissent en un seul point les extrémités de la corde, leur milieu L et les points I et K correspondants. Donc le lieu se confond avec la corde des contact du point A; ce qui démontre la seconde partie de l'énoncé.

Trajectoires dans le vide issues d'une même origine avec une vitesse initiale de direction variable, mais de grandeur constante.

Les propriétés précédentes de la courbe sont principalement intéressantes au point de vue de la connaissance géométrique de la courbe balistique dans le vide; celles qui vont suivre ont une importance bien autrement considérable en ce qu'elles sont à proprement parler la clef des solutions les plus simples et les plus élégantes des divers problèmes balistiques.

Si l'on considère toutes les trajectoires issues d'un même point origine O, sous un angle de tir variable, mais avec une vitesse constante, la considération de la figure générale qui a servi à la construction des éléments de la courbe permet d'énoncer immédiatement les propriétés suivantes:

1° Toutes les paraboles trajectoires dans le vide d'un mobile pesant fixe avec la même vitesse totale à leur passage en ce point ont une directrice com fixe à la hauteur: $h = \frac{v^2}{2g}$, dont cette vitesse est capable.

2° Le lieu des foyers de ces paraboles est la circonférence du cercle ayant p rayon la hauteur h due à la vitesse totale.

3° Le lieu des sommets est une ellipse dont le petit axe est égal à la hauteur double du petit. Les sommets du petit axe sont le point fixe et le point de sa ve lorsque la vitesse de jet constante en grandeur est dirigée suivant la verticale

L'ellipse est la projection d'un cercle sur un plan oblique à celui du les droites parallèles à l'intersection des deux plans se projettent en v lui sont perpendiculaires, c'est-à-dire les lignes de plus gran le rapport constant, égal au cosinus de l'angle des deux plans. (réduit d'ailleurs aussi dans un rapport constant d'expression moin

Si l'on observe dans la figure principale que la distance GS du som est égale à celle du foyer à la même droite, que sa distance SD à la direc FD du foyer à cette droite, on verra immédiatement que le lieu des s sur le plan de la figure, du cercle lieu des foyers dont on aurait fait de la directrice d'un angle tel que les lignes de plus grande pente rapport de 1 à 2.

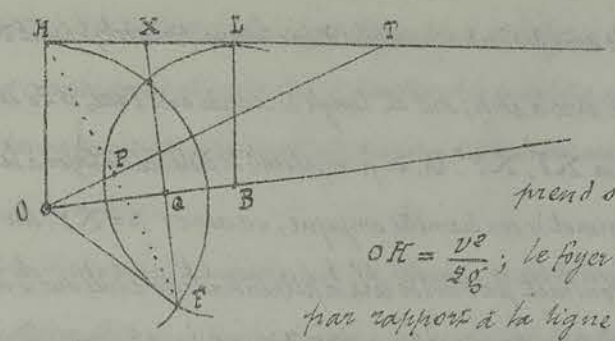
On peut également considérer l'ellipse lieu des sommets comm dans le sens parallèle à la directrice dans le rapport de 2 à 1 du cercle de Elle sera alors le rabattement autour de OH de l'intersection du cylindre de révo par un plan passant par OH et dont l'inclinaison sur le plan de la fig construisant un triangle rectangle vertical dont l'hypothénuse soit dou

Problèmes balistiques.

Construction de la portée sur une ligne de mira

Détermination des lignes de tir capables d'un

1° Construction de la portée. — La grandeur de la vite la directrice de la parabole décrite par le projectile; la direction d à la courbe et par suite le foyer F, intersection du cercle lieu des foyers, de ra de ses rayons qui fait avec la ligne de tir un angle double de celui que fait



Pour déterminer le foyer F de la trajectoire due à la vitesse v suivant la ligne de tir OT, on prend sur la verticale de l'origine O une longueur $OH = \frac{v^2}{2g}$; le foyer est le point F' symétrique du point H par rapport à la ligne de tir. Cela posé :

Le point de chute B sur la ligne de tir est le second point d'intersection de cette corde avec la parabole. Il se trouve donc à égale distance du foyer et de la directrice ; c'est donc le centre d'un cercle tangent à la directrice et passant par le foyer F ; le point F' symétrique du foyer par rapport au diamètre OB de ce cercle est aussi sur sa circonférence ; celle-ci est donc le cercle tangent à la directrice et passant par les deux points F et F'. Si l'on prolonge la corde FF' jusqu'à sa rencontre X avec la directrice, et que L soit le point de contact du cercle de centre B avec la directrice, on aura en vertu du théorème des sécantes : $(XL)^2 = XF.XF' = (XH)^2$

Le point L est donc déterminé ; il est à une distance du point X double de HX. Abaissant la verticale LB, on a le point de chute par son intersection avec la portée ou ligne de mire OB.

La distance XL du point X au point de la directrice situé sur la verticale du point de chute se trouve toute construite sur la figure en XH. Dans le cas où il s'agirait de trouver les deux points d'intersection de la parabole avec une droite quelconque sans connaître l'un d'eux au préalable comme ici, la construction n'en serait guère plus compliquée ; la distance XH = XL, dont le point X est séparé des deux points H et L de contact sur la directrice des cercles ayant leurs centres aux deux points d'intersection, serait égale à la racine du produit XF.XF', c'est-à-dire à la longueur de la tangente menée du point X à l'un quelconque des cercles passant par les deux points F et L.

Construisant l'un de ces cercles, on déterminerait les deux points H et L de la directrice situés sur les diamètres (verticales) des points O et B d'intersection ; celui-ci s'en déduirait, et l'on observerait que le diamètre du point X est à moitié distance des diamètres de ces deux points. Il passe donc par le milieu de la corde, c'est-à-dire qu'il en est le diamètre conjugué, ce qui démontre par la construction même des points d'intersection, que les milieux de toutes les cordes parallèles ont pour lieu géométrique la perpendiculaire à la directrice (diamètre) menée par le point où cette droite est rencontrée par le rayon vecteur mené du foyer perpendiculaire à la direction fixe des cordes.

a pl. la nouvelle origine et un point inférieur fig. (1) 2, 3, 4, 5)

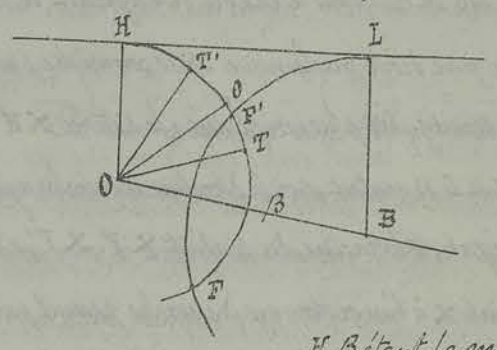
Si l'on considère la série des cordes parallèles d'une même parabole, le
le foyer F, le point F' varie avec la corde; soit α l'angle de la corde avec l'axe,
évidemment $c^2 \sin^2\alpha = XF.XF'$. Or; si p représente la distance du foy
du milieu de la corde au sommet de son diamètre conjugué, on aura : $p = X$
puisque la tangente au sommet particulier sera la perpendiculaire élevée

$$c^2 = \frac{2pZ}{\sin^4\alpha}$$

ce qui montre que les carrés des ordonnées, ou demi cordes conjuguées d'u
à leurs abcisses, ou distances de leurs pieds sur ce diamètre au point où il rencontre

2° Construction des lignes de tir capables d'un but

La construction des lignes de tir permettant d'atteindre un but donn
un projectile animé d'une vitesse donnée v, revient à la construction de
à celles des paraboles passant en ce point et ayant HD pour directrice q
Les foyers de ces courbes seront à une distance du but égale à la distance B
Ce seront donc les deux points d'intersection du cercle décrit du but B
différence BL de niveau avec la directrice pour rayon, avec le cerc
l'origine comme centre avec $OH = \frac{v^2}{2g}$ pour rayon. Ces deux foy
par rapport à la portée, ou ligne de mire.



Les deux lignes de ti
des angles formés
rayons OF et OF', se
rapport à la bissectrice
par la verticale et la

H β étant la moyenne des deux arcs H
la moyenne des deux moitiés HT et HT' des deux précédents.

Discussion du problème bal
Nombre de solutions. — Enveloppe des traject
à la même vitesse initiale totale, ou limite de l'e

Si dans la figure ci-dessus on suppose que le point B varie su
on s'aperçoit qu'à mesure qu'il s'éloigne de l'origine l'arc FF'
va en diminuant progressivement tandis que son milieu β re
réduit à Zéro, les deux lignes de tir capables de la portée OB s

la bissectrice $O\theta$ de l'angle formé par la verticale et la ligne de mire. Si le point B s'éloigne encore, les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre et le problème reste sans solution. Ainsi :

1° Sur une ligne de mire quelconque la portée maxima s'obtient avec une ligne de tir bissectrice de l'angle formé par la ligne de mire avec la verticale.

2° Une portée quelconque moindre peut être obtenue au moyen de deux lignes de tir ayant pour bissectrice la ligne de tir de portée maxima. Les deux lignes de tir à égale portée font le même angle l'une avec la ligne de mire l'autre avec la verticale.

3° La courbe lieu des portées maxima sur toutes les lignes de mire, c'est-à-dire la courbe enveloppe des trajectoires est donc le lieu des centres des cercles tangents à la fois au cercle lieu des foyers et à la directrice.

Si l'on considère que un cercle de même centre et dont le rayon serait plus grand d'une longueur fixe égale au rayon du lieu des foyers passera par le point origine O et sera tangent à une horizontale plus élevée que la directrice précisément de la même quantité on verra que :

4° La courbe limite de l'espace dangereux dans le plan de tir est une parabole ayant l'origine O commune à toutes les trajectoires pour foyer, la directrice commune à celle-ci pour tangente au sommet et une droite à hauteur double pour directrice. Elle est égale à la trajectoire que décrirait le mobile lancé horizontalement, mais au dessus de la hauteur du jet vertical.

Cette courbe est évidemment tangente à toutes les trajectoires puisque celles-ci l'atteignent sur les rayons où elles donnent les portées maxima, et ne sauraient la traverser. Si l'on considère d'ailleurs l'un des points de portée maxima, par suite commun aux deux courbes, on voit que les tangentes aux deux courbes se confondent puisque les rayons vecteurs se confondent, l'un des foyers étant le point O, le second l'intersection du cercle des foyers avec la portée qui fait au dessous de la tangente à l'origine le même angle que celle-ci avec la verticale.

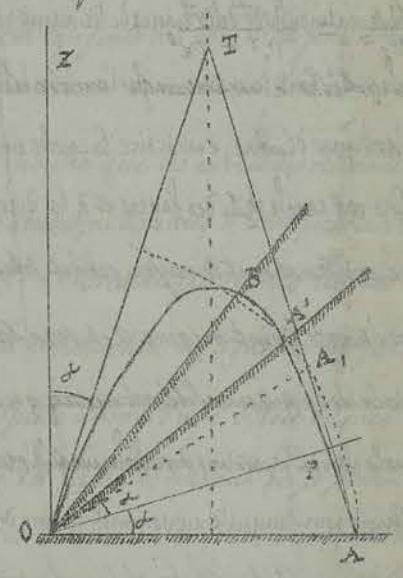
Si l'on fait tourner le plan de tir autour de la verticale de l'origine, la parabole limite de l'espace dangereux sera la méridienne d'une coupole de révolution séparant deux régions de l'espace telles que les points intérieurs peuvent être atteints au moyen de deux lignes de mire faciles à construire, et les points extérieurs sont hors de portée. Les points situés sur la coupole sont frolés par une seule trajectoire, tangente en ce point à la coupole paraboloïdale.

Comparaison des portées en terrain horizontal et en terrain incliné obtenues au moyen du même angle de mire.

Supposons que l'angle de mire restant constant on fasse varier la ligne de mire, ce qui revient en pratique à tirer sous diverses inclinaisons avec la même hausse. Comparons les diverses portées ainsi obtenues. La méthode élégante ci-après, due à M. le Commandant Mannheim, permet

or si la nouvelle origine est un point intérieur fig. (1) 2, 3, 4, 5)

de voir que pour des hausses médiocres et des élévations perspectives du but p
l'horizon, les portées resteront sensiblement égales à leurs valeurs en terra
en ce qu'il permet de graduer les hausses pour le tir de plein fouet d'après les
la distance ou portée.



Soit α un angle de mire c
en résulte donnera sur un
la même portée que la tr
vitesse initiale et faisan
α, c'est-à-dire correspo
(90° − α).

Sur un terrain d'inclinaison
obtenue avec l'angle de mi
l'intersection du terrain ave
tangente à l'origine fait l'angle α avec la verticale. La portée en terra
OA de cette parabole, décrivons avec OA pour rayon un cercle ayant O
coupera la tangente AT à la parabole au point de chute A_1 tel que
circonférence du cercle coupe la parabole au dessus de l'horizon, le plus rap
les deux points A' et B l'intersection sera au-dessus du point A_1 puisque la pa
et l'angle AOA' sera supérieur à 2α. Pour cette inclinaison de terrain
terrain horizontal. Pour les inclinaisons intermédiaires la portée est-m
assez faible. La portée minimum est comprise entre ces deux points ; ette
P cos. α, valeur de OP.

Pour les inclinaisons supérieures à OA', et comprises entre OA' et OB, les po
à celle en terrain horizontal, mais d'autant moins que les points B et A' sont p
l'angle α est plus grand. C'est entre ces deux points qu'est comprise la po
la courbe.

Les portées correspondantes aux lignes de mire légèrement inclinées au des
à OA, mais elles en diffèrent d'autant moins que l'angle de mire est plus pet
correspondantes aux lignes de mire légèrement situées au dessus de l'horiz
d'obliquité de la courbe sur le cercle.

On verra plus loin que, pour que le cercle coupe la parabole, il faut q

à 19° 28'; mais cette condition n'est pas suffisante, il faut qu'il soit inférieur à une limite plus faible que cet angle; qui serait obtenue en cherchant le point O sur la parabole tel que le cercle ayant OA pour rayon soit tangent à la courbe.

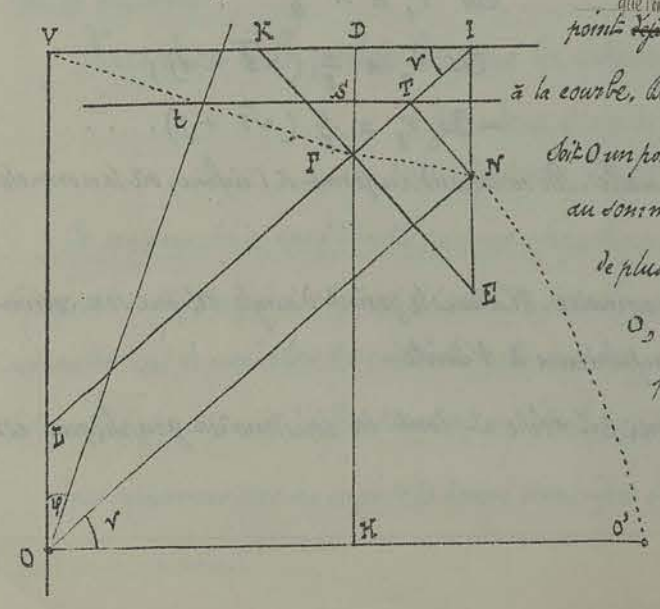
En résumé: Tant que l'inclinaison de la ligne de mire sur l'horizon, soit au dessus soit au dessous, ne dépasse pas certaines limites, les portées correspondantes à un même angle de mire sont sensiblement égales sur les lignes de mire diverses.

En construisant avec soin une parabole sur laquelle on prendra une série de points O déterminant une série d'angles de mire, et appliquant à chacun de ces points la construction qui vient d'être indiquée, on déterminera dans chaque cas particulier les limites d'inclinaison qui ne font pas différer les portées d'une quantité relative supérieure à une fraction donnée. On trouverait ainsi par exemple que pour l'angle de mire de 3°, les différences de portées sont absolument négligeables tant que l'angle d'élévation du but reste compris entre + 10° et − 10°; que pour l'angle de mire de 10°, c'est à l'inclinaison de 25° environ que correspond une portée égale à la portée horizontale.

Détermination sur une parabole de la normale égale à la corde horizontale issue du point où la normale vient couper la courbe.

Il est intéressant de déterminer le point O d'une parabole pour lequel la corde normale ON est égale à la portée horizontale, ou corde perpendiculaire à l'axe. Ce point divisera la parabole en deux branches, telles que: pour les points pris au dessous du point O, un cercle qui les aurait pour centre et dont le rayon serait égal à la portée horizontale, rencontrerait la courbe en deux points situés dans la région supérieure à l'horizon: pour les points compris entre le point O déterminé et le sommet, la région de la parabole supérieure à l'horizon serait en entier intérieure au cercle. Pour le point O lui-même, il y aurait contact entre les deux courbes.

Nous voyons tout d'abord qu'entre les trois rayons des points d'intersection de la courbe et du cercle se trouvent nécessairement deux portées, l'une maxima, l'autre minima; le point O centre du cercle est donc situé au dessous du point ~~déjà connu~~ que l'on déterminera bientôt, d'où l'on peut abaisser une seule normale à la courbe. Déterminons le d'une manière précise.



Soit O un point de la parabole de foyer F, directrice VD, tangente au sommet ST; et V la projection de O sur la directrice. Soit de plus N le pied d'une normale ON menée par le point O, et I sa projection sur la directrice; la droite FI sera parallèle à la normale ON, comme perpendiculaire à la tangente NT. Soit L le point où elle rencontre la parallèle OV à l'axe;

et si la normale originale est un point intérieur fig. (1) 2, 3, 4, 5)

la longueur LI sera égale à celle de la normale, et l'angle VIL égal à l'horizontale OO'.

Soit O' le point symétrique de O par rapport à l'axe ($OO' = 2OH$). Le problème consiste à trouver le point O de la parabole pour lequel on aura :

$$LI = ON = OO' = 2OH = 2VD$$

Or, si l'on prend le point E symétrique du foyer par rapport à la normale ON, les points V et I à la directrice passeront tous les deux en F et E. Si l'on prolonge la corde OV jusqu'à K, on aura $VK = KI$, car les carrés de ces deux longueurs sont tous les deux égaux à OF^2.

Remarquons que la droite KF est perpendiculaire à LI, et que l'on a :

$$\begin{cases} \cos. V = \dfrac{VI}{LI} = \dfrac{FI}{KI} ; \\ VD = VK + KD = KI + KD ; \end{cases}$$

Or, on voit également que : $KD = DF \operatorname{tg} V = p \operatorname{tg} V$;

$$FI = \frac{p}{\sin V} ;$$

Donc : $KI = \dfrac{FI}{\cos V} = \dfrac{p}{\sin V \cos V}$

et par suite : $VD = p\left(\operatorname{tg} V + \dfrac{1}{\sin V \cos V}\right) = p \cdot$

D'autre part : $LI = \dfrac{VI}{\cos V} = \dfrac{2KI}{\cos. V} = \dfrac{2p}{\sin V \cos^2}$

On a donc à trouver la valeur de l'angle V qui rend égales les deux expressions

$$\frac{p}{\sin V \cos^2 V} , \text{ et } p\,\frac{1 + \sin^2 V}{\sin V \cos V}$$

ou bien : $\cos V = \dfrac{1}{1 + \sin^2 V} = \dfrac{1}{2 - \cos^2 V}$

ou enfin : $\cos^3 V - 2 \cos V + 1 = 0$

que l'on peut écrire : $(\cos V - 1)(\cos^2 V + \cos V - 1) =$

On y satisfaira au moyen des trois valeurs V_1 V_2 V_3 telles que :

$$\cos V_1 = 1 ;$$

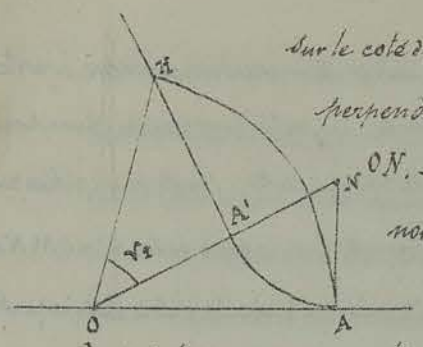
$$\cos V_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1$$

$$-\cos V_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1$$

La valeur de V_1 est donc nulle. Elle correspond au point à l'infini perpendiculaire à l'axe.

La valeur de V_3 est imaginaire. Il n'existe point d'angle tel que $\cos V_3$ soit égal à $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, quantité supérieure à l'unité.

Reste la valeur V_2 qui est réelle et dont la construction est simple.



Sur le coté d'un angle droit prenons une longueur quelconque AN; sur le coté perpendiculaire une longueur double : $AO = 2AN$. Joignons l'hypothénuse ON. La longueur sera égale à $AN\sqrt{5}$. Rabattons NA en NA' sur NO, nous aurons : $OA = AN(\sqrt{5}-1)$. Enfin élevons la perpendiculaire du point A' sur la droite ON, jusqu'à son intersection H avec la circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon. L'angle HON sera l'angle γ_2 cherché. Car l'on aura :

$$\cos HON = \frac{OA'}{OH} = \frac{AN(\sqrt{5}-1)}{2AN} = \gamma_2 .$$

La direction de la normale étant trouvée, la construction de son pied sur la courbe s'obtiendrait comme il a été vu plus haut. Enfin le point O se déduira de la position de sa projection V sur la directrice, déterminée par l'égalité $KV = IK$. On pourrait du reste arriver à ce point directement par la construction de sa tangente, dont l'angle φ avec la verticale se déduirait des considérations suivantes :

La tangente en O est perpendiculaire à la droite FV; l'angle φ est donc égal à DVF, et l'on a :

$$\cot g = \frac{DV}{p} = \frac{1+\sin^2\gamma_2}{\sin\gamma_2 \cos\gamma_2} ;$$

et, puisque : $\cos\gamma_2 = \dfrac{1}{1+\sin^2\gamma_2}$,

$$\cot g\ \varphi = \frac{1}{\sin\gamma_2 \cos^2\gamma_2}$$

D'après la valeur numérique de $\cos\gamma_2$ on aurait en substituant :

$$\cot g\ \varphi = \frac{4}{\sqrt{1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}\,(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{2}{3-\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}} .$$

Or, $\sqrt{5} = 2,2333$,

d'où $\cos\gamma_2 = 0,6191$; $\cot g\ \varphi = 3,35$.

On voit donc que $tg\ \varphi$ est à peu près égale à $\frac{1}{3}$, c'est à dire au sinus de l'angle β que fait avec la verticale la tangente à la parabole au point d'où l'on peut abaisser sur la courbe une normale unique*. Le point O que nous venons de chercher est donc en dessous de ce dernier, ce que nous avions déjà conclu de l'existence d'une portée minima.

Variation de la portée lorsque la vitesse initiale reste constante en grandeur et en direction.

(La ligne de mire seule est variable.)

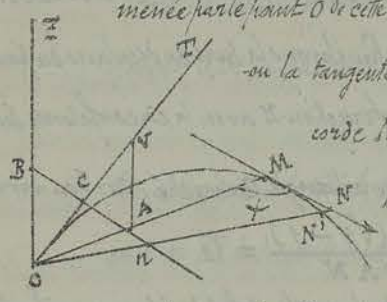
Ce cas, caractérisé par l'identité des diverses trajectoires dont un arc de grandeur variable est décrit par le projectile entre l'origine et le point de chute, est le seul sur lequel nous ajouterons quelques observations. Les autres cas de variation des éléments du tir se déduisent facilement des propriétés déjà données de la trajectoire et se trouvent d'ailleurs exposés en détail dans tous les cours de tir.

Nous supposerons donc un angle de tir donné et une ligne de mire s'abaissant insensiblement depuis la

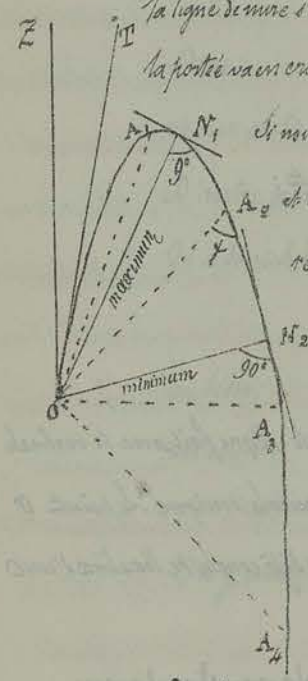
* Voir le paragraphe suivant.

a l'a nouvelle origine est un point intérieur fig. (1) 1, 3, 4, 5)

direction de la ligne de tir jusqu'à la direction verticale de haut en bas, nous verr
qui se présentent dans le mouvement d'abaissement continu de la ligne de mire sont les
menée par le point O de cette courbe, disposons la trancée. Il est incontestable que, tant qu
ou la tangente en M prolongée dans le sens du mouvement, fera une
corde MO, c'est à dire avec la direction comptée sur la ligne de mire
la ligne de mire ira en croissant à mesure qu'elle
ON' voisine de OM est en effet sensiblement égale à la
et celle-ci, plus éloignée du pied de la perpendiculaire menée du point O sur la tangen
cette dernière.



Si l'angle ψ = OMN était aigu, au lieu d'être obtus, on arriverait à la conc
décroîtrait à mesure qu'elle s'abaisserait au dessous de la ligne de tir. Cela prove
couchée sur la ligne de tir, l'angle ψ que nous considérons, supplémentaire d'ailleurs de
la ligne de mire s'abaissant d'une petite quantité il diminue d'abord; c'est un angle obtus et
la portée va en croissant, comme il est d'ailleurs évident à la simple inspection de la fig



Si nous sautions brusquement à une ligne de mire telle que OA_4 faisant avec
et dirigée vers le bas, nous trouvons que l'angle ψ est encore obtus et va en au
redevenir égal à deux angles droits à mesure que la ligne de mire de
haut en bas. La portée va donc en croissant encore dans ce cas. Ob
les premières portions de la trajectoire, et aussi dans les parties éloignées
En est-il de même pendant toute l'étendue de la courbe? C'est ce qu
Reprenons l'étude des variations de l'angle ψ, que fait la ligne
opposée à la portée. Nous avons vu qu'il est obtus dans le début
de la parabole va toujours en croissant lorsque cette corde se détach

L'angle ψ d'abord égal à deux droits, diminue de valeur à partir de l'origine. Cen
il redevient presque égal à deux droits et se rapproche indéfiniment de cette limite, lorsqu
rapproche de la verticale. Entre ces deux valeurs extrêmes l'angle est nécessairement passé
à cette de décroître à partir d'un certain point pour augmenter ensuite; la valeur de
décroissance de la période de croissance, valeur moindre que toutes les autres, aut
est ce qu'on nomme minimum, ou valeur minima.

Si ce minimum est un angle obtus, l'angle ψ, ne passant jamais au dessous de cette valeur
suite la corde, ou ligne de mire, ne cessera de croître depuis qu'elle se détache de la ligne de t

verticale, sa longueur soit infinie. A partir de ce moment, si le mouvement de rotation se continuait, on trouverait des valeurs négatives pour la corde; c'est-à-dire qu'elle rencontrerait la courbe sur un arc situé du côté opposé au mouvement par rapport à l'origine, arc qui complète la courbe géométrique mais qui reste étranger à la trajectoire mécanique. Mais dans le cas où le minimum de l'angle ψ est aigu, les choses se passent autrement. En effet dans sa période de décroissance suivant une loi continue, l'angle, d'abord obtus pendant la première partie de cette période devient droit à un moment donné; puis, continuant à décroître jusqu'à son minimum, est aigu pendant la seconde partie. Au moment où l'angle ψ est droit la corde ON_1 de la parabole (qui représente la portée) est normale à la courbe. Le premier rayon normal à la courbe mené par l'origine est donc un rayon maximum, puisqu'il sépare la courbe en deux arcs tels que la longueur aille en croissant continuellement dans le premier, pour décroître ensuite dans celui du second. La première normale ON_1 est ainsi une Portée maxima.

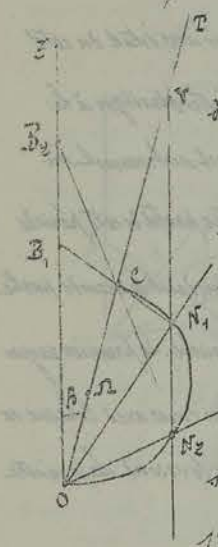
Dans la période de croissance de l'angle ψ, il passe à l'inverse de l'état d'angle aigu à celui d'angle obtus, par une valeur intermédiaire où il est droit, et par suite où la corde ON_2 est de nouveau normale à la courbe. La corde ON_2 divise donc l'arc correspondant à la période de croissance de l'angle ψ en deux parties, le long desquelles la portée va en décroissant pour la première, en croissant ensuite pour la seconde. La seconde normale ON_2, menée par le point O à la parabole, est ainsi la portée maxima. Elle est plus courte que celles qui l'avoisinent immédiatement, soit en deçà soit au delà de sa position.

On voit par cette analyse que dans le cas où l'on pourra mener à la parabole trajectoire deux normales par l'origine, ces deux normales seront la première une portée maxima, la seconde une portée minima. Elles diviseront la courbe en trois arcs le long desquels la portée ne cessera d'augmenter chez le premier, de diminuer chez le second, enfin d'augmenter de nouveau chez le troisième, tandis que sa directrice s'éloigne de la ligne de tir.

Un simple coup d'œil jeté sur une parabole, tracée même grossièrement, suffit à montrer que, si l'angle de tir est très-petit, la portée ira toujours en croissant, le minimum de l'angle ψ sera obtus; enfin que l'on ne pourra abaisser de ce point aucun rayon normal à la courbe; que si au contraire l'angle de tir est très-rapproché d'un angle droit, on pourra trouver des angles ψ aigus, le minimum en sera aigu; les deux rayons normaux à la parabole existeront, et par suite aussi la portée maxima et la portée minima. On voit que les deux cas peuvent se présenter; et que, si l'origine O se meut sur la courbe, il existe nécessairement une position de ce point telle que par tout point de la courbe compris entre le sommet de la parabole et ce point particulier on ne peut point lui mener de normale; par tout point de la branche de courbe située du côté de ce point opposé à celui du sommet on en peut au contraire mener deux. On conçoit que pour cette position les deux normales prêtes à disparaître sont en quelque sorte condensées en une seule. Ce point est celui pour lequel on ne peut mener qu'une normale à la courbe (outre la normale au point même que nous négligeons dans toute discussion). Nous allons le trouver d'une manière fort

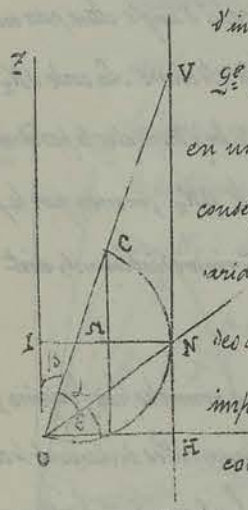
ou l'origine est un point intérieur fig. (1) 1, 3, 4, 5)

simple en cherchant la construction géométrique des normales à la courbe menées par l'origine.



Ces normales sont caractérisées par la valeur de l'angle de chute, qui est égale à un angle de direction de la tangente au point de chute; cherchons dans quelles conditions cette droite sera droite OV à vitesse initiale, C le point milieu de sa longueur; soit ON, une ligne de mire perpendiculaire; cette dernière étant dirigée suivant la droite B_1 CN, qui joint le milieu de la ligne de mire et de la verticale du point V; l'angle CN, O sera droit et par suite le point N du cercle décrit sur la demi vitesse initiale O C comme diamètre. Ces points de rencontre de la verticale du point V détermineront donc les lignes de mire normales à la trajectoire suivant la valeur de l'angle β de la vitesse initiale et de la verticale.

1er Cas. La verticale du point V coupe la circonférence décrite sur $CO = \frac{1}{2}V$. Dans ce cas il y a deux points d'intersection. Au plus rapproché du point C correspond la portée maxima; au plus éloigné



2e Cas. La verticale du point V est tangente à la circonférence. Dans ce cas il y a en un seul N. Il n'y a qu'une normale : alors pendant lequel l'angle β était aigu et conséquemment la ligne de mire va toujours en croissant; dans les environs du point I variation est très faible*. La position du point O sur à trajectoire qui correspond à ce cas des arcs de la parabole telle que par un point pris sur le premier on ne puisse pas mener implique que la ligne de mire ira sans cesse en croissant; et par un point pris contraire mener deux normales à la courbe qui seront la première la portée

Or, lorsque la droite VN est tangente à la circonférence décrite sur OC, le rayon ON et, comme il est moitié de OC ou de son égal CV, il est le quart de la vitesse longueur ΩV. La direction de la ligne de tir (ou de tangente à la courbe à limite O, est donc telle que la composante horizontale de la vitesse soit est donc des plus faciles à construire. L'angle β qui lui correspond est dé

Quant à la direction de la ligne de mire, elle est telle que $\Omega N = \Omega O$; pa du but ε et de mire α sont égaux : car $\varepsilon = HON = \Omega NO = \Omega$

La ligne de mire est la bissectrice de l'angle de tir. Elle est donc facile à construi

---

* Le point dont il est question ici est le point d'intersection de la parabole avec sa développée, courbe à laquelle sont

* Le cercle décrit du point O comme centre avec la portée pour rayon est tangent à la courbe néanmoins, et c'est le seul cercle tangent qui jouisse de cette propriété. On le nomme courbe au point de chute, ou encore cercle de courbure.

cherchons à l'obtenir directement par la valeur même de l'angle ε. Désignons pour simplifier l'écriture par r le rayon du cercle auxiliaire décrit sur OC. Nous aurons successivement les valeurs suivantes:

$$\Omega N = r\,;$$

$$O V = 4 r\,;$$

$$I \Omega = \frac{1}{3} r\,;$$

$$O H = I N = \frac{4 r}{3}\,;$$

$$V N = 2 r \sqrt{2}\,; \quad \text{Car : } \overline{VN}^2 = \overline{\Omega V}^2 - \overline{\Omega V}^2 = (9 r^2 - r^2) = 8 r^2.$$

$$N H = \frac{1}{3} V N = \frac{2 r \sqrt{2}}{3}\,;$$

$$O N = 2 r \sqrt{\frac{2}{3}}\,; \quad \text{Car } \overline{ON}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{NH}^2 = \left(\frac{2 r \sqrt{2}}{3}\right)^2 (2+1)$$

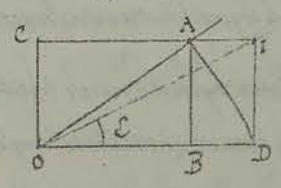
d'où l'on déduit :

$$\sin \varepsilon = \sin \alpha = \frac{NH}{ON} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,;$$

$$\text{Cos. } \varepsilon = \text{Cos } \alpha = \frac{OH}{ON} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{tg } \varepsilon = \text{tg. } \alpha = \frac{NH}{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

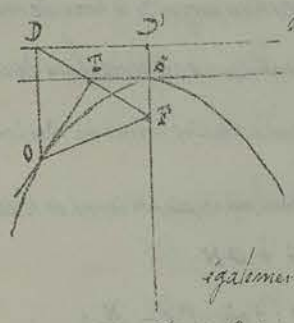
d'où, pour déterminer l'angle ε, la construction extrêmement simple.



Rabattre la diagonale OA d'un carré sur le coté OB en OD. Elever la perpendiculaire DI sur ce coté. Joindre le point I de rencontre avec le coté opposé CA au sommet O. L'angle DOI sera l'angle ε cherché.

Nota. Il en résulte que l'angle AOI est la moitié de l'angle β ce qui donne une seconde construction de celui-ci.

Pour construire le point O sur une parabole déterminée, on se souviendra que la tangente au sommet coupe les tangentes aux divers points où elles sont rencontrées par les perpendiculaires abaissées du foyer sur leur direction. Le foyer et la tangente au sommet étant déterminés, on saura donc



construire la tangente parallèle à une direction donnée. Quant au point de contact O, il se construira facilement en menant par le point où le rayon vecteur perpendiculaire à la tangente coupe la directrice une parallèle à l'axe (une verticale). Cette droite rencontrera la tangente au point O de contact cherché ; puisqu'en vertu de la construction ce point sera également distant de la directrice et du foyer, et par suite appartiendra à la courbe.

L'angle β déterminé ci-dessus, dont le tang est égal à $\frac{1}{3}$, est lui-même de 19°28 environ. Les valeurs relatives des composantes de la vitesse initiale qui y correspondent sont faciles à déterminer. En effet l'angle des composantes étant droit on a :

$$V^2 = a^2 + b^2\,;$$

Or,

$$V^2 = 9 a^2\,; \quad \text{puisque } V = 3 a.$$

Il en résulte :

$$b^2 = 8 a^2, \text{ ou } \frac{b}{a} = 2\sqrt{2}.$$

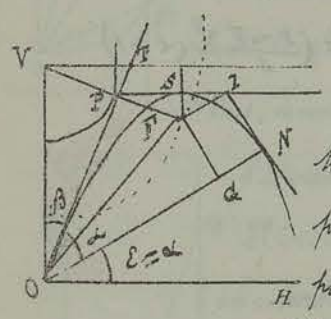
3e Cas — La verticale ne rencontre pas la circonférence ; il n'y a point dans ce cas de normale à

ou si la courbe origine est un point intérieur fig. (1) 2, 3, 4, 5)

la courbe issue de l'origine. La portée va sans cesse en croissant, comme dans le sec
éprouve cette sorte de temps d'arrêt ou d'abaissement infiniment petit, revenant de la ve
de la portée en une même longueur. En résumé tant que l'angle de tir est inférieur à l'angle do
tant que la vitesse initiale n'atteint pas le triple de sa projection sur l'horizontale, la portée
que la ligne de mire s'abaisse indéfiniment. Lorsque au contraire la vitesse est plus du triple
a une portée maxima et une portée minima.

Construction du point de chute sur la portée normale à la
ou l'on peut mener par l'origine une normale et une seul

(Portée à chute normale)



D'après ces données la construction de la normale unique menée à la p
tenue où l'on ne peut lui mener qu'une normale (au lieu de deux ou
point V comme centre décrit un cercle ayant pour rayon $\frac{1}{3}$ VO
par le point O sera la direction de la vitesse initiale qui engendre la
$\sin VOF = \frac{VF}{OV} = \frac{1}{3}$. Le point de contact F est sur la tangente au sommet. Le foyer
longueur égale, soit en cherchant l'intersection du cercle de centre O ayant OV pour ray
avec $\frac{2}{3}$ OV pour rayon. Menant FI parallèle à la direction de la ligne de mire normale
ce sera la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente au point de chute, et par co
ou à FI menée par le point I où FI rencontre la tangente SI au sommet n'est autr
de chute. Son pied N, ou projection de I sur OM, est donc le point de chute.

Remarquons en passant que nous avons donné pour tous les cas où du point O
à la parabole, la détermination des lignes de mire qui les représentent. La construction au
foyer et de la tangente perpendiculaire qui lui correspond donneront aussi facilement dan
particulier ci-dessus d'une seule normale, les grandeurs des deux normales, l'une maxima, l'a
directions. Elle fournit le moyen de construire graphiquement la longueur d'une portée quelconq

Calculons la longueur de la normale unique ; on a évidemment $ON = OG + G$

et de même : $\frac{FS}{FP} = \frac{VP}{VO} = \frac{1}{3}$; Or $FP = VP = \frac{1}{3}\,VO = \frac{1}{3}\,H$; d'où
(Le paramètre est égal par suite à $\frac{2H}{3}$) De plus $GN = FI = \frac{FS}{\sin\varepsilon} = FS\sqrt{3}$; On obtient do
Pour déterminer OG, il suffit d'observer que : $OG = OF \cos\alpha = H \cos\varepsilon = H\sqrt{\frac{2}{3}}$
Faisant la somme des deux valeurs : normale $= ON = H\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) =$
En fonction du paramètre de la parabole $p = \frac{2H}{3}$ on aurait pour valeur N de la no

Errata.

Page 8 Ligne 2 Au lieu de: *deux points quelconque*, lisez: *deux points quelconques*.

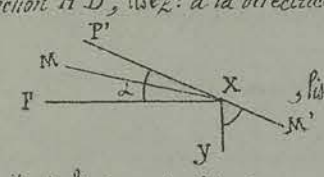
5 —— 16 Au lieu de: $\frac{1}{2} g t$, lisez: $\frac{1}{2} g t$.

6 —— 17 Au lieu de: *au coté OS du triangle*, lisez: *au coté OR du triangle*.

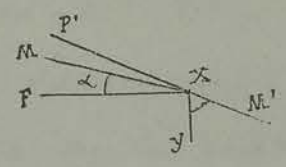
7 —— 11 Au lieu de: *diamètre conjugé à*, lisez: *diamètre conjugué à*.

11 —— 2 Au lieu de: *à la direction HD*, lisez: *à la directrice HD*.

15 Figure Au lieu de:



, lisez:

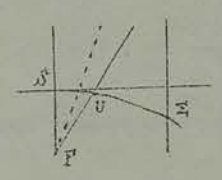


16 Ligne 5 Au lieu de: *se projectant*, lisez: *se projetant*.

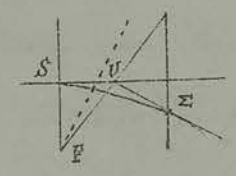
17 —— 2 Au lieu de: *direction*, lisez: *directrice*.

— —— 23 Au lieu de: *perpendiculaire ω au*, lisez: *perpendiculaire Iω au*.

18 Figure Au lieu de:



, lisez:



18 Ligne 19 Au lieu de: *le point L se*, lisez: *le point I milieu de la corde se*.

19 —— 9 Au lieu de: $\frac{FA}{OF} = \frac{FG}{OH} = \frac{HK}{OK}$, lisez: $\frac{FA}{OF} = \frac{FG}{OH} = \frac{HK}{OH}$.

— —— 12 Au lieu de: *hypothénuse commune OC*, lisez: *hypothénuse commune OA*.

— —— 13 Au lieu de: *angles droits F et A*, lisez: *angles droits F et G*.

21 —— 13 Au lieu de: $(XL)^2 = XF.XF' = XH$, lisez: $(XL)^2 = XF.XF' = (XH)^2$

22 —— 29 Au lieu de: *l'arc FF' d'intersection*, lisez: *l'arc FF' d'intersection*.

25 —— 17 Au lieu de: *pris au-dessus*, lisez: *pris au-dessous*.

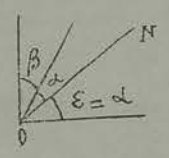
— —— 23 Au lieu de: *déjà connu*, lisez: *que l'on déterminera bientôt*.

27 —— 21 Après: *normale unique*, ajouter en renvoi: *voir le paragraphe suivant*.

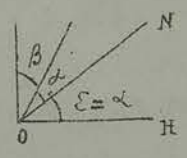
30 —— 21 Au lieu de: *longueur SN*, lisez: *longueur SV*.

31 —— 17 Ajouter: *ce qui donne une seconde construction de celui-ci*.

32 Figure Au lieu de:



, lisez:



---

et la nouvelle origine est un point intérieur fig. (1) 2, 3, 4, 5)

Note sur une nouvelle manière de classer les courbes du 2e Degré

par. E. Pagès.

60.

Je me propose dans cette note de discuter l'Equation générale du 2e degré à 2 variables comme on discute celle du 1er degré à 1 variable; cette discussion devient extrêmement facile quand on a résolu préalablement le problème suivant :

Etant donnée la fonction $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F$ (1).

Supposons qu'on l'égale à 0. et qu'on construise le lieu qu'elle représente. cela fait, on demande quels sont les points des plans dont les coordonnées mises à la place de x et de y dans la fonction (1) donneront un résultat de signe contraire à A ou de même signe que A.

1°. Si le lieu représenté par (1) = 0 est une Ellipse, une Parabole une hyperbole qui rencontre le diamètre qu'on obtient par la résolution de l'Equation par rapport à y, deux droites qui le coupent ou 2 droites parallèles; alors tout point intérieur au lieu donnera un résultat de signe contraire à A et tout point extérieur un résultat de même signe.

(Dans le cas de deux droites qui se coupent j'appelle point intérieur celui qui se trouve dans l'un des angles qui comprennent le diamètre qu'on obtient par la résolution de l'Equation par rapport à y)

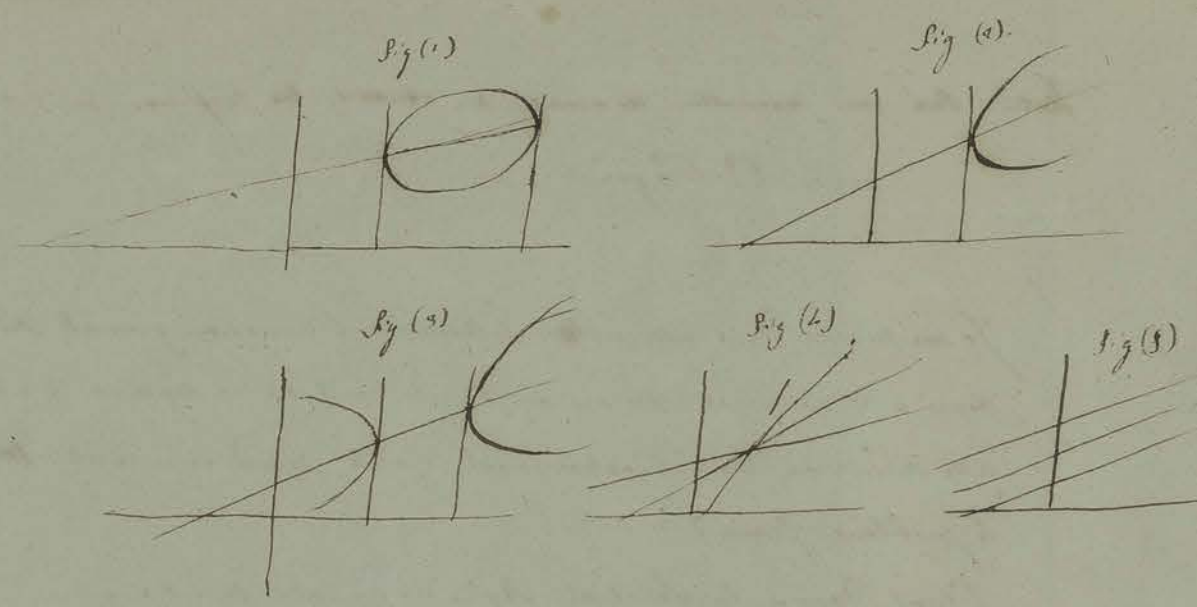
Démonstration —. Transportons les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes, et désignons par a et b les coordonnées de la nouvelle origine; la nouvelle Equation du lieu sera alors.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + H = 0. \quad \text{ou } H = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F$$

Cherchons le point ou le nombre qui Dy rencontre le lieu les distances de ce point à la nouvelle origine seront données par l'Equation

$$Ay^2 + Dy + H = 0 \quad (2)$$

or si la nouvelle origine est un point intérieur fig. (1) 2, 3, 4, 5)



Les Racines de cette Equation devront être de signes contraires dont le produit qui est $\frac{H}{A}$ devra être négatif ou H de signe contraire à A.

Si la nouvelle origine est un point extérieur les racines devront être de même signe ou imaginaires ou égales dont leur produit devra être positif ou H de même signe que A.

2° Si le lieu représenté par (1) = 0 est un point les racines de l'Equation (2) seront imaginaires ou égales dont tout point hors ~~du lieu~~ le point du lieu donnera un résultat de même signe que A.

3° Si l'Equation (1) = 0 ne représente aucun point, alors tout point du plan donnera un résultat de même signe que A les racines devront être imaginaires.

4° Si le lieu est une hyperbole qui ne rencontre pas les deux axes pour résolution de l'Equation, alors tout point donnera un résultat de même signe que A puisque les racines devront être de même signe; et tout point extérieur mais de signe contraire à A puisque les racines auront un signe contraire à A.

Si A = 0 et que C ne soit pas nul on comparera le résultat à celui de C.

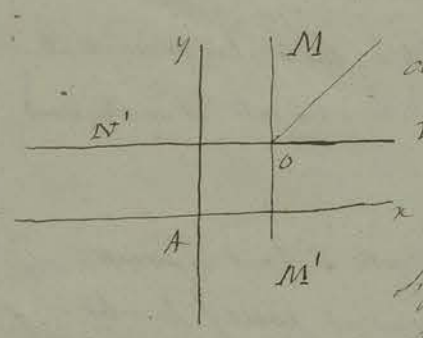
Si A = 0 & C = 0. L'Equation (1) ne serait plus du 2e on ne peut plus employer la même méthode de démonstration

il est facile d'y suppléer par une autre considération.

En effet si l'on considère une fonction quelconque à 2 variables et qu'après avoir construit le lieu représenté par cette fonction égalée à 0 on prenne deux points du plan tels qu'en les joignant par une ligne droite il n'y ait aucun point de lieu situé sur cette portion de ligne. Je dis que ces 2 points doivent donner pour la fonction ~~deux~~ résultats de même signe. En effet si en remplaçant dans la fonction y par $\alpha x + \beta$ qui est l'ordonnée de la ligne droite et en faisant varier x depuis l'abscisse du 1er point jusqu'à celle du 2e la fonction prenait 2 signes différents, à chaque changement de signe il y aurait évidemment un point d'intersection dans la portion de ligne que l'on considère et le lieu aurait des points communs ce qui est contre l'hypothèse. Si au contraire on considère 2 points tels qu'en les joignant par une ligne, il y ait sur cette ligne un seul point d'intersection la fonction dans le passage de l'abscisse du 1er point à celle du 2e devra changer de signe une seule fois et par conséquent les 2 points que l'on considère devront donner des résultats de signe contraire.

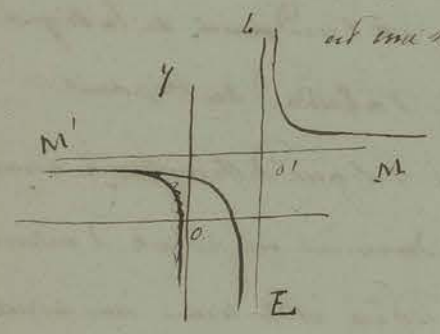
Or si $A=0$ et $C=0$. L'Equation (1) représente 2 Droites parallèles aux axes ou une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes.

Supposons d'abord le cas des 2 Lignes droites si ces 2 lignes droites sont MOM' NON' tous les points situés dans l'angle MON donneront d'après la proposition précédente un résultat de même signe, et je dis que ce signe sera celui de B. En effet considérons les points situés sur la bissectrice de MON dont l'Equation est $y = x + \alpha$ en substituant dans l'Equation $Bxy + Dy + Ex + F = 0$. on obtient un résultat de la forme $Px^2 + Px + Q$ et l'on sait que pour de très grandes valeurs de

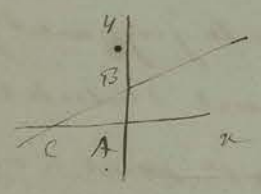


2° cette fonction prend le signe de B, ce qui demontre la p
énoncée. D'ailleurs d'après la proposition de la page precéde
points situés dans l'angle adjacent donneront un résultat
contraire à B par suite les points situés dans le 2e angle
résultat de même signe et les points situés dans le 4e ang
signe contraire.

Il sera facile de s'assurer par la même démonstration que l
est une hyperbole qui est la position ci-contre. Les po
intérieurs donneront un résultat de même signe que B
les points extérieurs un résultat de signe contraire. L
aurait lieu si l'hyperbole était dans le 2 ang
LOM L'OM'.



Enfin si A = 0 B = 0 C = 0 L'équation représente une d
tout point au dessus du plan o.o.d. rend le demi axe po
donne un résultat de même signe que D, tandis que tout poi
plan au dessous donne un résultat de signe contraire.



Application de ce problème à la détermination ~~générale~~ de qua
générale du 1 degré à 3 variables.

Soit l'équation générale du second degré à 3 variables

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz + 2cx + 2c'y + 2c''z + D = 0.$$

Je la suppose résolue par rapport à z, on obtient ainsi
expression de la forme :

$$z = Mx + N'y + P \pm \sqrt{Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F}$$

on obtiendra la projection de la courbe située sur le plan de
en égalant à 0 le polynome $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F$ et
le lieu représenté par cette équation.

1° Supposons $A < 0$ le lieu étant une Ellipse. tout les p
intérieurs donneront pour le radical un résultat positif. Les
points extérieurs un résultat négatif. La surface sera donc
dans le cylindre vertical ayant pour base l'Ellipse a

proportion
ite le
de degré
un
ultat de

le lieu
mite
10 sous
Tonne
gle

oite d
dif du q
d de

tion

ème

ametral
ontinuant

ronit
bul bi
ème prix
clude pro